

doi: 10.11823/j.issn.1674-5795.2023.04.04

量子精密测量参数估计优化研究进展

肖太龙^{1,2}, 曾贵华^{1,2*}

(1.上海交通大学量子感知与信息处理研究所, 上海 200240;

2.上海交通大学区域光纤通信网与新型光通信系统国家重点实验室, 上海 200240)

摘要: 量子精密测量是利用量子叠加与纠缠、量子相互作用过程与量子测量等方式增强参数估计精度与灵敏度的技术, 是在短中期内最具前景的量子技术之一。本文从量子精密测量的最优化研究方案出发, 通过对大量的相关文献进行梳理归纳, 分析出量子精密测量三大优化方案: 量子态制备与测量最优方案、量子演化过程调控方案与经典后处理优化方案, 并对三个基本优化方案进行总结分析。同时介绍了国内外量子精密测量技术的最新理论与实验进展。最后, 总结了量子精密测量存在的问题与挑战, 并对未来工作进行了展望。

关键词: 量子精密测量; 最优化; 量子计算; 机器学习

中图分类号: TB939

文献标志码: A

文章编号: 1674-5795(2023)04-0044-17

Research progress of parameter estimation optimization in quantum metrology

XIAO Tailong^{1,2}, ZENG Guihua^{1,2*}

(1.Institute for quantum sensing and information processing, Shanghai Jiao Tong University,

Shanghai 200240, China; 2.State key laboratory of advanced optical communication systems and networks,

Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: Quantum metrology is a technology to enhance the accuracy and sensitivity of parameter estimation by using quantum superposition and entanglement, quantum interaction process and quantum measurement. It is one of the most promising quantum technologies in the short and medium term. Starting from the optimization research scheme of quantum metrology, we analyze three optimization schemes of quantum metrology by combing and summarizing related literatures, which are categorized into: quantum state preparation and measurement, the control of quantum evolution process and the classical post-processing optimization. The latest theoretical and experimental progresses of quantum metrology are introduced. Finally, the problems and challenges of quantum metrology are summarized, and the further work is prospected.

Key words: quantum metrology; optimization; quantum computation; machine learning

0 引言

第一代量子技术革命催生了如半导体、激光

等关键技术。第二代量子技术革命直接对量子物质进行精确操纵, 在近二十年内取得了长足的进展, 诞生了如量子通信、计算与精密测量等前沿

收稿日期: 2022-12-02; 修回日期: 2023-01-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61701302, 61631014, 61905140, 61631014)

引用格式: 肖太龙, 曾贵华. 量子精密测量参数估计优化研究进展[J]. 计测技术, 2023, 43(4): 44-60.

Citation: XIAO T L, ZENG G H. Research progress of parameter estimation optimization in quantum metrology [J]. Metrology & Measurement Technology, 2023, 43(4): 44-60.



技术。量子信息技术的快速发展极大地促进了量子保密通信、量子计算和量子精密测量等量子增强技术的发展与实际应用能力^[1]。量子精密测量技术通过采用量子纠缠、量子叠加、量子演化和量子测量等技术,能够实现对未知环境参数进行感知估计,且参数估计的精度甚至可以超过标准量子极限,逼近海森堡极限^[2]。因此,采用量子信息技术能够极大增强传统传感器(如磁力计、测温计、重力计、加速度计等)的计量精度和灵敏度,使这些传感器在精度需求更高的场景中得到良好应用,如引力波探测^[3]、生物探测^[4]、原子时钟同步^[5]和分布式量子传感^[6-7]等。

量子精密测量的关键任务是在给定的量子资源和参数估计方案下获取估计精度极限^[8-9]。当测量次数有限时,获取最终的参数估计极限往往比较困难;在没有先验信息的条件下,获取参数估计精度极限需要最小化全局成本函数,以优化参数估计方案^[10]。实际上,求解该全局优化问题仅针对少数对称的情形。然而,当测量次数趋近于无穷大时,全局优化变得十分简单,只需要设计合适的估计子(如极大似然估计子)该全局优化问题即转化为局部优化问题^[11]。此时,一个设计良好的成本函数能够通过方差近似,它对应于成本函数在真实参数附近进行的二阶泰勒级数展开,此时,局部的精度极限能够通过量子克拉美罗界(Quantum Cramer-Rao Bound, QCRB)进行刻画^[12]。量子克拉美罗界能够通过量子费舍尔信息进行计算,在单次测量的情形下,其之间互为倒数^[13-14]。

近些年,量子精密测量技术的理论体系比较成熟,主要围绕在实际物理系统中对理论方案进行实现,取得了很多实质性的进展。量子增强的精密测量技术可以突破标准量子极限,在理论上达到更高的对未知参数的感知精度。本文从量子精密测量的发展脉络出发,对量子精密测量的研究方案进行归纳总结,并给出了每个研究方案的优缺点和未来的发展方向。随着量子信息技术的深入发展,直接操纵量子物质水平的需求提高,量子精密测量技术在其中扮演着不可或缺的地位。另一方面,量子信息技术的发展也会进一步推动量子精密测量走出实验室,面向实际应用场景。

1 量子精密测量的基本过程及精度极限

1.1 量子精密测量基本过程

量子精密测量的基本过程可以分为量子态准备操作、量子态演化操作及量子态测量操作,如图1所示,采用量子线路的方式对量子精密测量的基本过程进行刻画。

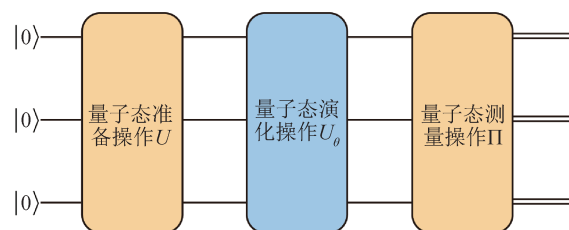


图1 量子精密测量基本过程

图1 Basic process of quantum metrology

量子态准备操作制备量子态 $|\psi_0\rangle$,然后量子态演化操作对初始量子态进行演化。量子精密测量中编码未知参数的量子操作一般用量子演化来描述。量子演化是量子信息量子力学的基础。一个完全隔绝的量子系统,可以采用薛定谔方程来描述。假设初始量子纯态为 $|\psi_0\rangle$,在哈密顿量为 H 的量子系统中的时间演化为 $\partial_t|\psi\rangle = -iH|\psi\rangle$ 。该方程的解表述为 $|\psi_t\rangle = U(t)|\psi_0\rangle$,其中, $U(t)$ 为么正算符, $U(t) = T \exp\left(-i \int_0^t H(\tau) d\tau\right)$, T 为时间排序算符^[15]。当哈密顿量 H 与时间无关时,该算符退化为 $\exp(-iHt)$ 。真实参数 θ_{true} 编码在量子哈密顿量中,演化后的量子态编码了未知参数的信息。但孤立的量子系统在实际中不存在,采样量子主微分方程的形式来描述含噪声的量子演化过程^[16-18],此时量子态只能采用密度矩阵的形式进行描述。假设系统只存在马尔可夫噪声,如退相干噪声、自发辐射噪声等,系统的演化可以描述为

$$\partial_t \rho = -i[H, \rho] + \sum_k \left(A_k \rho A_k^\dagger - \frac{1}{2} \{A_k^\dagger A_k, \rho\} \right) \quad (1)$$

式中: A_k 为第 k 个Lindblad算符。

实际上含噪声的量子系统的演化还可以采用克劳斯算符的形式来描述,其本质是一种积分的形式,涉及到量子信道的概念。在该表述中,量子信道的输出量子态可以描述为

$$\varepsilon(\rho_{in}) = \sum_{i=1}^m K_i \rho_{in} K_i^\dagger \quad (2)$$

式中： K_i 为克劳斯算符并且满足完备性准则 $\sum_i K_i^\dagger K_i = I$ ， I 为单位算符。

值得注意的是，给定量子信道所对应的克劳斯算符描述不是唯一的。积分形式的含噪声描述常常在数学刻画和量子动力学刻画中比较方便，而微分形式的表述在量子精密测量的数值仿真优化中比较常用。对演化编码参数信息的量子态，进行测量得到关于参数的条件概率分布，即

$$p(m|\theta) = \text{Tr}[\Pi_m \theta] \quad (3)$$

式中： $\{\Pi_m\}$ 为完备的POVM(Positive Operator Value Measurement)测量算符集合。量子测量能够获得经典概率分布信息，从而能够通过统计估计方法获得对未知参数的估计。

1.2 量子精密测量精度极限

在研究量子精密测量的最优方案时，需要先研究刻画参数估计理论精度极限的量子克拉美罗界。为了从条件概率分布中估计真实参数 θ_{true} ，存在任意局域无偏估计子的方差下界即经典克拉美罗界为

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nI_\theta} \quad (4)$$

式中： $\text{Var}(\hat{\theta})$ 为估计子的方差， $\text{Var}(\hat{\theta}) = E\left[\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)^2\right]$ ； $\hat{\theta}$ 为局域无偏估计子，满足数学关系 $E(\hat{\theta}) = \theta_{true}$ ， $\frac{d}{d\theta} E(\hat{\theta})|_{\theta_{true}} = 1$ ； n 为重复测量的次数或样本数目； I_θ 为经典费舍尔信息(Classical Fisher Information, CFI)，表达式为

$$I_\theta = \int \frac{[\partial_\theta p(m|\theta)]^2}{p(m|\theta)} dm = \sum_m \frac{[\partial_\theta p(m|\theta)]^2}{p(m|\theta)} \quad (5)$$

经典克拉美罗界可以被推广到多参数情形，此时无偏估计子的方差成为参数协方差矩阵，克拉美罗界正比于协方差矩阵的逆^[19-20]。当样本数目趋近于无穷大时，克拉美罗界能够被渐进地饱和。

量子费舍尔信息(Quantum Fisher information, QFI)被定义为在所有的POVM测量中最大的经典费舍尔信息^[21]，即

$$F_\theta = \max_{\{\Pi_m\}} I_\theta(\{\Pi_m\}) \quad (6)$$

量子克拉美罗界可以被定义为

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nF_\theta} \quad (7)$$

量子克拉美罗界在单参数的情形下也可以被渐进地饱和。在多参数情形下，量子克拉美罗界由多参数的协方差矩阵表示，其正比于量子费舍尔信息矩阵的逆^[22-24]。数学上，量子费舍尔信息矩阵的元素为

$$F_{jk} = \frac{1}{2} \text{Tr}[\rho \{L_j, L_k\}] \quad (8)$$

式中： L_j 为第 j 个参数 θ_j 的对称对数算符(SLD)，是微分方程 $\partial_\theta \rho = \frac{1}{2}(\rho L_j + L_j \rho)$ 的解，且非互易操作为 $\{L_j, L_k\} = L_j L_k + L_k L_j$ 。当多参数退化为单参数时，量子费舍尔信息的矩阵退化为量子费舍尔信息标量，即为

$$F_\theta = \text{Tr}[\rho_\theta L_\theta^2] \quad (9)$$

对于单参量估计情形，即使在有限样本条件下，量子克拉美罗界总能通过采用对单参量SLD算符的本征态进行投影测量并采用极大似然估计进行饱和。但对于多参量情形，参数之间的非互易性，不能对编码多个参量信息的量子态同时执行最优POVM测量，因此，在一般情形下同时获得多个参数的最精确估计往往是不可能的^[22]。目前为了克服多个参量不能同时最优估计的问题，有研究采用维度膨胀的方法，即采用附属量子态与编码参数的量子态进行耦合，如进行贝尔纠缠等^[25]。在经过参数化量子过程时，参量信息扩散到附属量子态中，最终通过贝尔测量的方案获得对多个参量的同时最优POVM测量。这种方案的直觉是低维度的量子态通过增加附属量子态后，在更高的维度空间编码的参量信息转化为一种互易的情形，从而可以通过更高维度的纠缠测量方案同时对量子态进行最优估计。

量子费舍尔信息还可以从量子几何的角度来阐述，即采用布鲁斯距离来度量量子态之间的距离，从而与量子态保真度之间形成了紧密联系^[26]。量子费舍尔信息正比于布鲁斯距离的二阶泰勒展开，因此直观上量子费舍尔信息实际上是量子态保真度的灵敏度^[27]。保真度与费舍尔信息之间还可以通过编码信息的量子信道来建立联系^[28]。从量子力学的视角来看，量子态和量子信

道本质上是统一的, 研究量子态的保真度和布鲁斯距离本质是从薛定谔绘景来描述, 而研究量子信道与保真度和布鲁斯距离则是从海森堡绘景来描述。近期有一些研究采用机器学习方法对量子态和量子信道进行学习, 但它们并没有对两者进行严格的区分^[29-30]。从几何的视角来理解和研究量子费舍尔信息能够带来更加深刻直观的看法, 如华中科技大学的刘京与香港中文大学的袁海东等人建立起来的费舍尔信息层次结构^[31]通过经典概率分布的保真度推断出其布鲁斯距离进而得到经典费舍尔信息, 而量子态的保真度推断结合布鲁斯距离得到量子态费舍尔信息, 量子信道的保真度结合布鲁斯距离得到量子信道的量子费舍尔信息。量子几何的布鲁斯距离及其衍生出的数学符号建立起保真度与费舍尔信息之间的联系。量子几何的视角还能更加直观地建立量子克拉美罗界与量子速度极限之间的联系。量子速度极限衡

量了非正交量子态演化过程重能够被区分的最短时间^[32]。量子速度极限甚至可以超过海森堡极限, 是量子信息中一种更加深刻的概念, 目前针对量子速度极限的研究仍然较多^[33-35]。但值得一提的是, 相较于算符代数的数学描述, 几何角度不方便建立起多参量的研究体系。量子几何和算符代数的方案互为补充, 共同完善量子精密测量的理论研究。

2 量子精密测量优化方案

量子精密测量的基本框架如图2所示, 主要包含四个基本步骤: 量子态制备、量子过程参数化、量子测量及后处理估计。四个基本步骤与最终能实现的精度极限紧密相关, 其中前三个步骤决定了量子精密测量参数估计的精度极限, 而第四个步骤决定了有效估计未知参数的能力, 这里需要设计良好的无偏估计子并采用合适的估计算法。

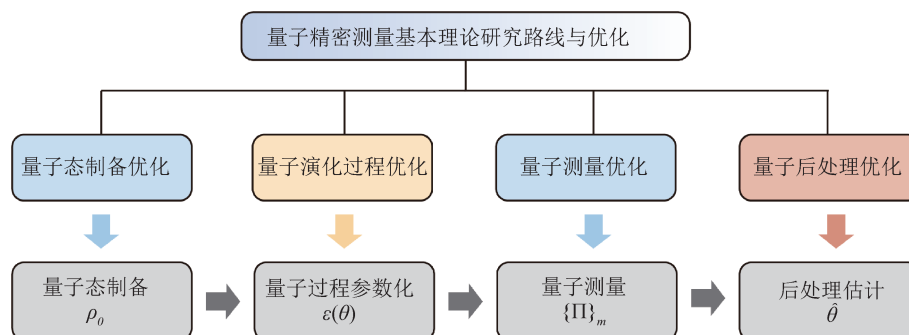


图2 量子精密测量基本框架与研究方案

图2 Basic framework and research scheme of quantum metrology

为了实现最优的参数估计, 图2中所述的四个基本步骤都需要最优化处理。使用经典概率统计方法(如贝叶斯估计、极大似然估计理论等)对后处理估计步骤进行了比较充分的研究。这些常用的统计估计算法原则上能够给出参数的无偏估计。在量子精密测量中, 前面三个量子步骤的优化是关注的重点, 因为它们直接决定了量子参数估计的理论精度极限。虽然后处理优化不能提高参数估计的精度, 但它实际上直接决定了参数估计方案是否能获得最佳的精度, 具有重要意义。以下将从四个基本优化路线进行量子精密测量的研究综述, 对各优化模块进行总结并给出了可能的研究方案和发展趋势。

2.1 量子态制备优化

量子态制备优化是设计量子精密测量最优方案的第一步。量子精密测量技术提出以来, 大量的研究集中在初始态和量子测量的优化上面。在渐进状态下, 选择合适的初始量子态来最大化量子费舍尔信息, 或是当确定测量方案后, 最大化经典费舍尔信息。在态优化的任务中, 大量的研究可以被分为分析方法和数值方法两类。对于分析方法而言, 一般出现在量子演化过程比较对称和简单的情形, 如马赫-曾德尔干涉仪(MZI)等。但对于较为复杂量子系统, 数值方法则得到广泛的研究。袁海东等人从量子信道保真度和量子费舍尔信息的角度建立起初始态制备的凸优化模

型^[36]，该模型通过寻找最优的初始态最小化量子计量矩阵的迹，该计量矩阵的迹与量子费舍尔信息紧密关联。分析优化方法随着量子比特数目的增长而指数增长，因为计算QFI与计算密度矩阵的对角化是等价的。对于对称的情形，如考虑在MZI干涉仪中，初始量子态的研究较多，此时，MZI的量子演化过程可以用 $U(\theta) = \exp(-iH\theta)$ 来描述，最优的量子初始态为哈密顿量 H 的最大本征值与最小本征值的等概率叠加态^[8]。对于光学MZI干涉仪而言，其输入存在两个模式，待估计的参数则是光学臂之间的相位差。Caves等人研究了当一个模式输入为相干态，另一个模式为压缩真空态的情形，此时标准量子极限能够被超越^[37]。Lang和Caves等人接着研究了当只输入真空压缩态而不输入相干态时，光学MZI干涉仪的相位估计的精度能饱和量子克拉美罗界^[38]。随后，他们研究了当一个模式输入为真空压缩态时，另外一个模式的最优输入态，发现另外一个模式的最优态仍然是真空压缩态，但这两个真空压缩态需要相反的压缩值才能达到最佳的相位匹配条件^[39]。Monras等人研究了单模高斯态在么正信道下的最优参数估计的问题，发现真空压缩态是最优的^[40]。Safranek等人考虑了多种特定信道条件下的最优初始态问题，包含相位变换、压缩和广义双模压缩和模式混合信道等，他们通过最大化QFI来完成直接的分析优化计算^[41]。Berry与Wiseman等人研究了在贝叶斯优化的条件下，当先验信息为均匀分布时，固定光子数的最优输入态^[42-43]。他们通过最大化Holevo相位方差，得到了最优输入态的形式。Takeoka等人结合QFI的凸形式，证明了MZI干涉仪中的no-go定律^[44]，即在一个模式中输入真空态（不输入任何态），两个光学臂之间都存在未知相位的情况下，另外一个端口无论输入任何量子态都无法超过标准量子态，而这正是引力波探测需要面对的场景。Afek等人通过参量下转化制备了5光子NOON态^[45]，而压缩态的压缩信噪比目前实验室能做到不超过15 dB^[46]。传统的量子参数估计方案集中在针对某个特定的演化系统求解最优的量子初始态，然后计算出一个极限界，比如有针对连续变量高斯态和猫态的研究，还有针对特定分布的光子数分布的输入态研究^[47-49]。

QFI的凸性意味着最优状态通常是纯的，但在某些特定情况下，针对混合态的优化仍然可能是有意义的。Modi等人研究了量子线路中的参数估计问题，最优初始态通过调节哈达玛门和受控非门的排列组合最大化QFI^[50]，这实际上是初步地通过量子计算来研究量子精密测量问题。Fiderer等人研究了当输入态是某个固定的混合态的么正变换时的情形。该输入态经过另外一个么正变换编码参量信息。他们发现最优的初始态是一个混合态且每个纯态分量与么正变换的生成元的本征态的叠加态相关联^[51]。Correa等人研究了与储罐处于平衡状态的全热化温度计的最优初始态。他们假定初始态是一个 N 维系统，发现最优的热态需要哈密顿量是一个等效的二能级系统，并且具备高度简并的激发态和特定的温度相关能隙^[52]。

寻找含噪声量子系统的最优态要困难得多。大多数有噪声的量子演化都是用微分方程来描述的，在很多情况下，它们无法解析求解，这使得分析最优量子态优化变得困难。在可以获得密度矩阵或QFI的解析解的情况下，分析优化的可行性仍然没有得到保证。然而，解析表达式对于优化具有参考意义，从而出现了半分析优化方法。Dorner等人研究了在损耗MZI干涉仪中的最优量子态的情形^[53]，其中光学臂可能存在光学损耗。最优输入态可以表示为一个固定光子数的双模纯态，但每个光子数的概率幅是待定的。因此，结合凸优化算法，可以通过建立QFI与待优化的量子态之间的函数关系，从而得到最优的概率幅度系数。然而，这种半分析方法仍然停留在比较简单的情形，如损耗的MZI干涉仪等。对于更加复杂的含噪声动力学演化，半分析方法仍然难以优化出最优的量子初始态。

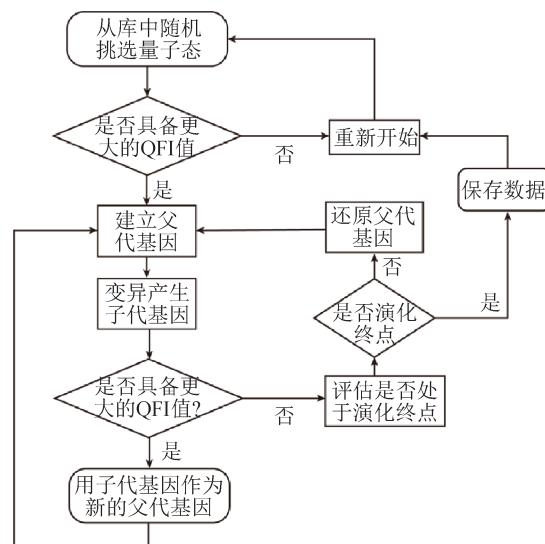
相较于分析优化方法，数值方法更适用于一般的量子演化场景。尽管大多数搜索算法可以用于最优量子态的优化，但受维数的限制，这些算法通常只能应用于有限大小的系统。直觉上，为了使搜索算法的有效性得到提高，可以假设量子态存在特定的拟设，即缩小了搜索空间。Frowis等人研究了多体自旋系统的频率估计问题^[54]，为了缩小搜索空间，先设定了最佳初始态的数学形式，留下待优化的概率幅度系数。他们开发了一种不

需要求解梯度的 Nelder-Mead 单纯形搜索算法^[55]，通过设计概率幅度和 QFI 之间的目标函数关系，从而算法每次迭代时计算成本函数，刻画当前搜索系数的质量。通过采用局部退相干主方程进行数值仿真，发现了虽然单轴扭曲旋转自旋量子态的展现出了较好的表现，但当自旋原子数目大于 70 时，最优性仍然无法得到满足。这一结果也说明了，自旋压缩量子态在有限量子比特数目下不一定是最优的。当存在集体退相干时，数值结果显示 GHZ (Greenberger-Horne-Zeilinger, GHZ) 纠缠态是最优的。Knott 等人提出了基于遗传算法的量子态优化方法，通过从常见的量子光学实验平台中选择量子操作和量子态如相干态、压缩态和福克态等，将最大化 QFI 来优化最优的量子态组合^[56]，算法示意图如图 3 所示，其中， T_1 、 T_2 分别为算法优化后的输入态，SV 为压缩态，SNL 为散粒噪声极限。搜索能力更强的算法如粒子群算法^[57]、深度强化学习算法如评论家-演员算法^[58]、策略梯度算法^[59]等未来都能在态优化任务中得到应用。

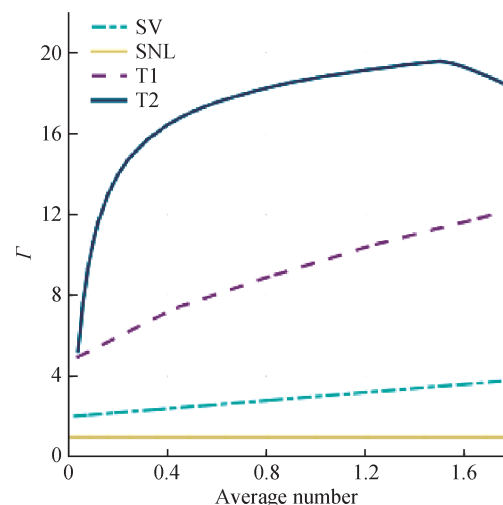
量子态优化是取得量子精密测量参数估计精度极限的必要步骤。从分析方法和数值方法的演进，量子精密测量态优化的研究方案逐渐考虑更加复杂的实用化场景。这些研究结果表明量子相干性如量子叠加、压缩和纠缠等能提高参数估计的精度，甚至能超过标准量子极限。为了获得满足要求的最优量子态，需要通过复杂的量子操作进行制备，如压缩和纠缠等。但受实际量子技术手段的限制(如压缩度无法得到进一步的提高，纠缠态的粒子数目提高十分困难等)，这种基于相干性的精密测量方案就待估计参数的精度而言还无法超过经典方案，但基于量子精密测量方案启发的经典纠缠如结构光场中的高阶模等^[60]能够相较于经典精密测量快速地达到标准量子极限。

2.2 量子测量优化

对于单参量估计问题，量子克拉美罗界能够通过 SLD 算符的本征态进行投影测量饱和。但随着量子态的维度越来越大(如在大规模中性原子系统中)，SLD 算符的本征态基本上很难获取。即使知道 SLD 算符的本征态，这种 POVM 测量可能不是局部测量，而是高维度的非局域测量(如贝尔测量等)，这在实际中面临巨大的挑战。最



(a) 遗传算法优化输入量子态流程图
(a) Flow chart of optimization of input quantum state by genetic algorithm



(b) QFI与平均光子数的比值随平均光子数的变化曲线
(b) Curve of the ratio of QFI to average photon number versus average photon number

图3 基于遗传算法的量子精密测量优化方案与仿真结果
图3 Optimization scheme of quantum metrology and simulation results based on genetic algorithm

优的量子测量一般取决于待估计的参数，因此在实际中可以通过自适应测量的方式来获得最优测量^[61-62]。但这种自适应测量仍然需要大量的数据处理开销，并且有些自适应测量方案还涉及到非局域测量，因此在实际中也存在难以实现的问题。

早期，大量的自适应测量工作都集中在光学MZI干涉仪中。基本的数学模型的一个光学臂为未知待估计相位，另外一个光学臂为调控相位。通

过自适应调节可调相位,使得干涉仪的干涉条纹能见度最大,此时对应于调控相位与未知相位相等的情形。这方面积累了大量的研究工作,比如分析不同输入量子态下的自适应测量方案,如压缩态、双模压缩态、高斯猫态等^[63-65]。Berry等人提出了一种在线的自适应局部测量相位估计方案^[42]。该方案采用清晰度函数(Holevo相位方差)作为成本函数来评估当前自适应测量方案的适用度。他们建立了每次测量之间的条件概率递归关系,并采用当前不同测量结果的测量概率作为权重来最大化目标函数。这种方案能够实时自适应估计相位,并且最终能够收敛到最优估计。

与之相对比的则是线下自适应测量方案,该方案通过在实验前设定相关的公式规则来模拟实验过程。假设实验过程测量 M 次,整个测量过程则可以看成一个平衡二叉树。树根节点为初始态,然后每次测量都会进行分叉,对于离散变量而言存在两种可能,即0和1。线下自适应方案的一个可行的优化成本函数是从根节点出发,所有可能的路径对清晰度函数的加权平均。然后最大化该

成本函数即能找到最佳的自适应测量方案。由于二叉树随着测量次数的增加、宽度指数的增长,给搜索带来了巨大的挑战。Hentschel与Sanders等人提出了一种基于粒子群算法的自适应测量方案^[66],算法示意如图4(a)所示。该方案首先构建了当前调控相位与前一次调控相位和前一次测量结果之间的递归关系,这一规则极大地减小了搜索空间。算法通过迭代优化寻找最合适的自适应调控相位集合。实验中,可以通过采样多项式级别的测量结果,就能得到一个较好的近似。该算法能够有效提高干涉仪抵抗噪声的能力,并且超过了传统的方案,如图4(b)所示,其中, V 为Holevo方差, N 为光子数。Peng等人进一步提出了一个优化假设^[67],将该复杂度降低为 $O(N^4)$ 。实验中,Lumino等人基于粒子群算法对直积态作为输入进行实验,表明该算法能够较好的达到标准量子极限^[68]。Sanders等人为了进一步提高线下自适应测量的有效性,提出了基于微分演化的算法等,将能够承受的光子数提高到100个左右。还有学者提出基于遗传算法的自适应优化等^[69-71]。

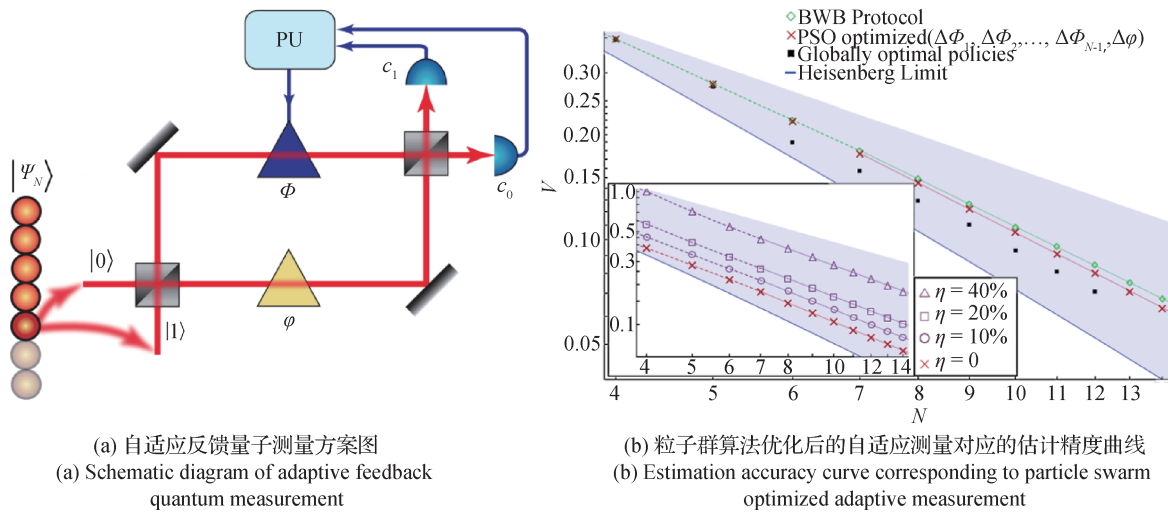


图4 基于粒子群算法的自适应量子测量方案与仿真结果^[66]

图4 Adaptive quantum measurement scheme and simulation results based on particle swarm optimization^[66]

对于连续变量高斯态, Wiseman等人提出了一种基于自适应零差探测的相位估计方案^[72],该方案后来通过输入相干态被实验证明^[73]。Olivarse等人研究发现,在零差探测中,待估计相位与压缩参数有关联,并提出了一种贝叶斯推断的自适应测量策略^[74]。贝叶斯估计子是渐进无偏并且具备

在渐进条件下达到量子克拉美罗界的能力。Berni等人从实验上通过输入压缩光并结合贝叶斯推断实现了自适应零差探测方案^[75]。Wheatley等人采用自适应零差探测方案并结合量子平滑技术^[76]来估计随机相位漂移^[77]。Wiebe等人提出拒绝滤波的自适应测量方案^[78],从而加速贝叶斯推断过程。

Xiao 等人提出了一种显示的反馈策略,并结合递归贝叶斯方案进行自适应相位测量,该方案能拓展连续变量量子相位估计的动态范围,并且结合先验信息,增强了量子相位估计的精度^[79]。Fiderer 等人提出了一种基于神经网络的自适应贝叶斯估计方案^[80]。最近,有研究使用物理调制的方式对待测量的量子态进行后调制,从而提取最优的信息^[81-82]。此物理调制的方案可以避免使用后处理算法的方式来进行参数估计。

由于受实验中测量手段的限制,如光学体系仅能实现强度探测、零差探测、单光子探测和少光子计数等,其中单光子计数测量的效率还较低,原子体系中较易实现单粒子投影测量与少体联合测量,提出的大部分自适应测量方案无法有效应用于实验方案中。为了增强自适应量子测量的实用性,优化算法需要将当前量子测量设备的实际限制考虑入实际的优化过程。

2.3 量子参数化过程优化

前面总结了量子态制备优化和测量优化方案,发现两者都受限于实际的量子器件,虽然能优化出具体的量子态和测量方案,但受量子器件的限制无法成功制备和实现测量。量子调控优化在本质上是一个更加广义的概念,量子态优化和量子测量都能纳入到量子调控的范畴。但这里为了加以区分,将量子态优化和测量单独介绍,这也符合量子精密测量研究的发展脉络。

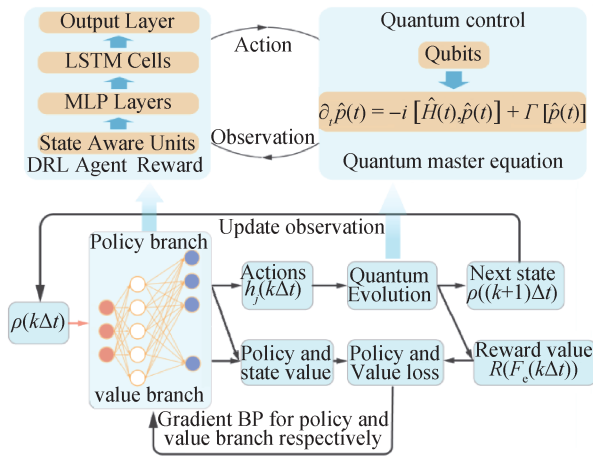
对于难以实现的量子态和量子测量方案,可以通过对较易实现的量子态进行量子调控,使其满足一定的最优性条件,然后经过调控后的量子态也能采用较易获取的量子测量方案获得最佳的参数估计。这种参数估计方案与传统的基于光学干涉仪的方案不同,后者依赖于产生的量子态和测量,而量子调控则需要精确可控的量子操作,从而对相干量子操作提出了更高的要求。袁海东等提出了序列量子调控策略,通过引入与系统哈密顿量符号相反的调控哈密顿量,经过量子调控后的末态通过投影测量,理论上能够实现最优的参数估计^[83]。然而系统哈密顿量的参数未知,因此需要通过自适应的调控方案获得对调控哈密顿量的估计。序列量子调控方案在SU(2)光学系统系统得到了实验证实^[84]。Pang 等人考虑了时间相关

的哈密顿量系统的么正演化过程,通过采用算符代数的分析方式给出了时间相关哈密顿量参数估计的QFI的上界,并分析了一种比较通用的量子调控哈密顿量,发现对于线性参数耦合的哈密顿量系统,量子调控是不必要的,而对于系统哈密顿量对参数的导数与自身不互易时,量子调控是获得参数估计精度极限所必要的^[85]。他们提出的量子调控策略需要相干量子操作,并且在自适应调控中,最优的参数估计精度极限不能饱和QFI。Pang 等人后来提出了在受限量子调控操作算符集合下的变分准则,进一步从理论上分析了量子调控在实际量子精密测量参数估计中的重要性^[86]。但对于含噪声的复杂系统的量子演化,分析方法无法给出精确的量子调控策略。因此,需要采用数值方法进行分析求解。

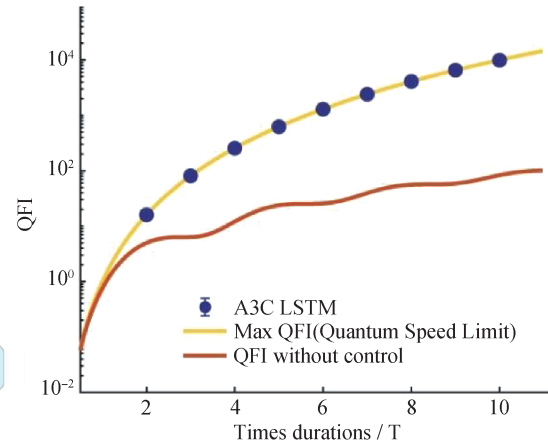
刘京等人采用量子主方程对量子演化过程进行分析建模,并考虑了马尔可夫噪声的情形,阐述了量子调控的可行性^[87-88]。通过采用量子费舍尔信息作为目标函数建立起量子调控参量与QFI之间的关系,采用梯度上升脉冲算法(GRAPE)来优化每个时刻的量子调控序列,从而最大化QFI。刘京等人后续采用GRAPE算法分析了多参量条件下的量子调控策略,采用了量子费舍尔信息矩阵的下界来作为优化目标函数。通过最大化量子费舍尔信息矩阵的下界对量子调控参量进行优化,从而实现对参数的最优估计。基于梯度的算法需要经过大量复杂的梯度计算,而对于更加复杂的大规模系统,成本函数对每个调控参量之间的梯度无法获得。另外一种方案是采用差分准则来求解成本函数与调控参量之间的梯度,尽管其需要更多的数据处理。Xiao 等人后来通过研究发现,对于复杂的系统,基于差分准则的梯度估计下降方案面临优化过程不稳定的问题,这与优化平面非凸的有关系,即基于梯度的算法比较容易陷入局部最优解^[89]。Xu 等人通过采用深度强化学习算法研究了量子调控与参数估计精度极限的关系^[90]。采用比较成熟的异步演员-评论家算法(A3C)和近端策略优化算法(PPO)来优化量子调控序列;采用量子主方程来刻画量子演化过程,通过最大化奖励函数来训练量子调控策略。他们后续采用深度确定策略梯度强化学习算法(DDPG)来研究多参量

的估计问题，并通过和 GRAPE 算法进行比对，发现 DDPG 算法具备更低的计算复杂度和更强的优化能力。Xiao 等人针对时间关联的哈密顿量参数估计问题，采用 A3C 算法来优化量子调控序列^[89]，算法结构如图 5(a)所示。研究发现在时间关联中，Xu 等人提出的奖励函数无法适用，因为最佳 QFI 与无调控 QFI 不在一个数量级，因此需要对 Xu 等人提出的奖励函数进行修正。Xiao 等人提出了一种更加一般化的奖励函数，该函数能够兼容 Xu 等

人提出的奖励函数，且能在时间关联系统中表现良好，仿真实验结果如图 5(b)所示，深度强化学习调控的量子演化过程能够饱和最大 QFI。另外，Xiao 等人从量子几何视角推导了时间关联系统的最优 QFI，并进一步给出了含噪声系统的 QFI 的上界。发现达到上界需要非凸优化技术，基于传统的梯度下降算法无法有效求解。通过实验分析，也证实了 GRAPE 算法优化过程不稳定的问题，且只能达到次优解。



(a) 基于深度强化学习的时变信号量子参数估计方案图
(a) Schematic diagram of quantum parameter estimation of time-dependent signal based on deep reinforcement learning



(b) QFI随演化时间变化的曲线图
(b) Curve of variation of QFI with evolution time

图5 基于深度强化学习的量子调控方案与仿真结果^[89]

图5 Quantum control scheme and simulation results based on deep reinforcement learning^[89]

对于非马尔可夫的情形，最近也有一些研究半定规划方法获得了最优的估计精度。基于量子调控的量子精密测量方案仍然是以 QFI 为核心进行优化。但是当系统规模逐渐扩大时，获取量子演化系统的 QFI 本身就是非常困难的，随着量子比特的增长计算需求指数增长。因此，未来采用基于 QFI 的优化策略可能不再适用，需要采用更加可行的成本函数来作为优化目标。如有研究采用经典费舍尔信息矩阵来优化量子调控过程，或者是采用更加有效的深度学习架构，如知识蒸馏，即将训练好的大规模网络的知识通过特定的技术迁移到实用化的小网络中，该网络不要求解 QFI 来作为其监督信号，而只需要采用大网络的知识即可^[91]。另外，可以通过更加有效的 QFI 估计算法来克服计算 QFI 难的问题，如研究提出的基于随机局部投影测量的方案估计 QFI，尽管该估计算法仍

然需要指数级别的测量局域测量次数^[92-93]。另外，可以通过采用量子计算机对 QFI 进行估计，如采用变分量子算法估计 QFI，这在理论上更加有效^[94]。

量子参数化过程的优化不仅针对量子哈密顿量系统进行调控，还可采用量子纠错技术来进行调控。量子纠错技术是对抗量子噪声十分有效的手段，目前量子计算方面亟待解决的问题是研究更加有效的纠错编码技术。在量子精密测量中，纠错编码技术能有效的检测和纠正噪声的影响，防止量子演化过程退相干，不能超过标准量子极限。量子纠错编码技术本质上是要寻找一个希尔伯特空间的子空间使得任意的量子态在该子空间内都能找到一个恢复信道能够抵消到任意噪声的影响。当误差克劳森算符将该子空间(码字)映射到未变形的正交子空间，则可被检测和纠正。在量子精密测量中，由于量子参数化过程还编码了

信息,量子纠错编码不仅要保护量子态不受噪声的影响还要保证参数信息不受影响。Kessler等人提出并建立了量子精密测量中量子误差纠正技术适用的基本条件和分析框架,为量子误差纠正技术在量子精密测量中的应用奠定了理论基础^[95]。他们分析论证了两个充分必要条件:①克劳斯算符的共轭与其本身的乘积在码字空间的投影变换后仍然能通过码字空间的投影算符线性表示;②量子哈密顿量的生成元算符经过码字空间投影算符变换后(等效生成元算符),其在码字空间的方差的最大值大于零,即关于参数的最大QFI大于零。这两个基本数学条件的满足能够保证码字空间能够成功的恢复噪声演化后的量子态。Wur等人通过研究量子误差纠正技术在含噪声量子演化参数估计中的应用^[96],并分析多体量子系统中单量子比特退相干和横向噪声的影响,得出了量子纠错编码技术能够对含噪声精密测量维持海森堡界的可行性。Unden等人通过实验证明执行重复的量子误差校正,同时保持对信号场的敏感性,可以保护室温混合自旋寄存器免受环境退相干的影响^[97]。

Zhou等人^[98]通过研究马尔可夫噪声条件下的量子纠错编码技术在量子精密测量中的可能性,提出了一个准则,即哈密顿量不能被Lindblad算符张成的空间表示,量子纠错技术能够保证系统达到海森堡极限,并且明确给出了一个码字空间的构成规则。Layden等人^[99]研究发现动态去耦方法只能部分去除与信号耦合的环境噪声。经分析发现动态去耦利用信号和噪声中的时间噪声相关性,而量子纠错编码方案利用空间相关性。Layden等人^[100]通过理论研究发现,当系统哈密顿量与噪声算符互易时,不需要额外的辅助量子态和控制设备就能通过量子误差纠正技术来恢复量子态。他们给出了一个半定规划程序来寻找最优的码字,并在退相干噪声和损耗玻色子模式两种情形下进行数值分析,说明了算法的可行性。Zhou等人^[101]提出了一种最优近似量子误差校正策略,在最一般的自适应参数估计方案中渐近饱和精度下限。他们还提供了一种寻找最优码字的有效数值算法。Shettell等人^[102]分析了通过结合现有的实际量子技术手段,分析了误差纠正量子精密测量的实际限制,论证了量子误差纠正技术对恢复海森堡极

限是有帮助的。Rojkov等人^[103]研究了量子误差纠正技术使得量子精密测量参数估计在现实环境中产生偏差的问题。分析了若忽视这种偏差可能会系统地降低量子传感器在实验中的性能,并在理论上给出了最小可检测信号的误导值,还在连续时间量子误差纠正的实验激励设置中分析了这种效应展示如何补偿这种偏差带来的好处。Wang等人通过探索玻色子模式的希尔伯特空间,开发了近似量子误差校正和量子跳跃跟踪方法,通过实验证明了一种使用玻色子探针的量子增强传感方案^[104]。实验说明了近期量子计算技术的发展对推动量子精密测量技术是非常重要的。

量子参数化过程优化能有效缓解对量子态和测量资源的依赖,但该过程需要对量子系统进行最优相干调控,这在实验中也存在一定的问题,如调控存在谱泄漏、相干调控最优序列未知等。随着量子技术的发展,这些问题在原则上能得到较好的缓解。从发展趋势来看,采用强化学习算法能够有效地优化最优的量子调控序列,相比传统基于梯度优化算法,强化学习算法更具备普适性且计算效率更高。通过设计合适的奖励函数,强化学习算法找到实现全局最优解。另外,量子误差纠正技术是当前量子计算需要解决的挑战性问题。因为过大的噪声能够完全覆盖住微弱的量子信号,使量子计算无法发挥出潜在的优势。量子精密测量中量子态也会受到噪声的影响,使参数估计的灵敏度衰减到标准量子极限。因此,保护量子态的相干性成为了量子精密测量与量子计算共同的目标^[105]。保护参数信息在量子态编码前后保持不变是量子精密测量的特有性质,否则就失去了量子精密测量的意义。目前,量子纠错编码技术在单参数估计中有较多的研究方案和相关的码字数值优化算法^[106]。但对于多参量估计问题,由于哈密顿量系统变得复杂,需要考虑更加精细的数学结构,这对传统的凸优化方案也提出了挑战^[107-108]。开发更加有效的数值优化算法来寻找最优的纠错编码是实现量子精密测量参数估计的发展方向之一。

2.4 后处理优化

量子部分的优化直接决定了最终的参数估计理论极限。后处理优化部分则是从测量后的数据

概率分布中提取出最佳的估计。虽然处理部分不会影响参数估计的精度极限，但在实际中快速有效的恢复策略仍然十分有意义。对于传统的后处理方案如极大似然估计、最大后验概率估计等。虽然计算复杂度较高，但能保证参数估计饱和其精度极限。但对于复杂的概率分布或含噪声演化的量子态的测量的概率分布，常规的高斯分布和二项分布无法建模，极大似然估计不可行，因为其依赖于已知的概率分布。最大后验概率估计方案同样存在类似的问题。

为了克服此问题，有研究采用神经网络来变分刻画未知的概率分布，然后采用监督学习策略来估计未知参数^[109]。Valeria等人采用神经网络来校准量子传感器^[110]，本质上是通过量子传感器进行测量得到神经网络的输入，然后采用在 $[0, 2\pi]$ 内均匀采样的相位值作为标签进行监督训练。后来，Nolan等人采用机器学习算法对贝叶斯参数估计问题进行建模分析，将贝叶斯参数估计问题转化为一个多分类问题^[111]，从频率主义角度给出了基于机器学习的参数估计问题，本质上是对极大似然估计在有限样本下的近似^[112]。Ban等人通过采用神经网络建立量子探测与未知参数之间的映射关系^[113]，结果表明：经过充分训练的神经网络能够在量子传感器呈现复杂响应的情况下，以及在由于测量次数减少而产生的显著散粒噪声下，以最小的基础物理模型知识来表征目标。后来，Chen等人通过镱离子量子磁力计从实验上验证了基于监督机器学习的量子参数估计的可行性^[114]。Cimini等人采用监督学习和强化学习的混合方案对多参量参数估计问题的后处理进行分析^[115]。首先，采用监督学习方案对量子参数估计进行分析，建立起量子探测概率分布与参数之间的函数关系；然后，利用贝叶斯准则并结合强化学习算法对多参量子相位估计进行自适应测量，以实现饱和精度极限。这种基于机器学习的贝叶斯参数估计问题不对量子态制备、演化过程和测量进行任何优化，而只关注后处理过程的参数估计问题，为较复杂的场景中的量子传感器校准问题提供了解决方案^[116]。但值得注意的是，这种基于监督学习的后处理方案在多参量和精度要求比较高的场景中，需要非常多的分类神经元，

从而给人工神经网络的训练带来了一定的难度。另外，这也需要大量的样本数据进行训练大规模的神经网络，但在有效性方面存在一定的挑战。

3 量子精密测量的最新进展

近些年，量子计算技术的快速发展给量子精密测量带来了新的机遇与挑战。在量子计算中，需要对量子比特执行量子逻辑门，从而实现对量子比特的操作。量子精密测量任务同样也需要针对量子态进行调控和优化。实际上，量子精密测量的基本过程可以看成是一种特殊的量子计算过程，其中的态制备、量子演化编码和测量等与量子计算的基本过程相匹配。量子精密测量参数估计不需要像量子计算那么高要求的量子比特保真度和高度可编程性，在量子计算设备中存在很大的应用前景。

Koczor等人提出了变分量子态量子精密测量方案^[117]，即采用量子神经网络变分模型在含噪声的量子演化中优化量子输入态，使参数估计的精度能够克服噪声的影响，逼近理论极限。Meyer等人提出了量子多参量估计中的通用变分算法，即通过变分神经网络不断优化和改进输入态^[118]。这种基于量子机器学习的变分量子输入态使得该方案具备更强的抗噪声性能和实用性，并且可以在NISQ(Noisy Intermediate Scale Quantum)设备上执行。Zoller等人针对离子阱系统中的集体自旋比特进行变分量子传感器的研究^[119]。首先，将多比特自旋系统全部初始化为基态，然后，采用离子阱系统中的变分量子操作算符来操纵基态的变换。通过选择合适的目标函数来评估当前变分量子操作的最优性，然后不断地迭代优化，最终变分量子操作能够使得基态转化为最优的量子自旋压缩态，使QFI达到最大，这种方案属于量子态制备优化。因为该方案制备的最优量子态在实验中无法有效进行测量，因此在经过原子干涉仪变换后的量子态后面继续添加多个变分量子操作层用来优化测量方案^[120]。他们选择了一个比较实用的成本函数，即贝叶斯均方误差成本函数，不需计算QFI，而只需从量子态的测量概率分布中获取信息就能进行评估。通过多轮次迭代优化，最终变分量子操作使得量子态优化为最优量子自旋压缩态，

并且对编码参数信息后的量子态进行量子调控使最终只需要经过投影测量就能获得最佳的测量。他们团队在16量子比特的离子阱系统中对该方案进行了实验研究^[121]，通过实际的激光操纵离子实现相干量子操作，从而实现对量子态精准变换。现阶段，离子阱量子比特的规模正在逐步上升，未来在大规模离子阱系统中实现原子干涉仪的精确参数估计将有助于推动原子钟传感器的进步。Zhang等人通过构建物理层的量子机器学习方案，优化分布式量子传感网络中的分束器权重，从而使传感网络的识别率相较于经典方案更高^[122-123]。

近期，有研究发现量子多体系统中存在临界点，在临界点附近系统呈现出高灵敏度特性，因此可以被用来作为高灵敏度的量子传感^[124]。Liu等人提出了一个具有一阶量子相变的扰动伊辛自旋模型的绝热方案^[125]。通过引入一个小的横向磁场，不仅可以在基态中编码一个未知的参数，而且还可以调节能隙以控制绝热通道的演化时间。此外，通过使用核磁共振技术进行实验，实现了临界量子计量方案，表明了临界点时精度达到海森堡标度 $1/T$ 。Ding等人在量子多体里德堡原子系统中实验上利用临界点特性实现了增强的磁力计^[126]，他们发现外部驱动的微小变化会导致临界点附近里德堡态的布居数发生很大的变化，并导致光传输信号的显著变化。对于临界点的连续光传输，量化了提取费舍尔信息的增强灵敏度，与单粒子系统相比，由于多体效应的存在，增强的灵敏度增加了3个数量级。Ilias等人提出了一种通过连续观测发射的辐射量子来增强临界感知的方案^[127]。建立了耗散临界点处联合系统和环境状态的全局量子费舍尔信息的标度理论，导出了普遍的标度律，其特征是由基本临界指数控制的瞬时和长期行为。重要的是，这样的定标定律超过了标准量子极限，原则上可以使海森堡极限饱和。

通过研究量子多体系统中的相变如临界点增强、对称破缺等机制可以开发出更灵敏的量子传感机制^[128-129]。目前，量子计算物理体系尤其是中性原子体系和离子阱体系中量子比特的可扩展性已经取得了长足的进展，并且关键技术已经取得了实质性突破。相较于基于光学体系中的压缩和纠缠方案提升测量精度，未来基于量子多体系统的

量子精密测量更易获得实际的参数估计精度优势，因为光学体系中量子态的压缩度和纠缠尺度短时间内无法取得重大突破。另外，基于量子计算体系如中性原子和离子阱系统的量子精密测量还具备可编程性的优势。目前多体系统量子传感不需要通用的可编程性，且对量子误差的阈值要求也不如量子计算那么高，因此多体量子精密测量是近期量子计算最有前景的应用之一。当前技术所支持的可编程性可以足够的操作局部的量子比特，使量子态制备优化和测量优化甚至是量子调控优化变得十分便捷，因此原则上能够饱和量子费舍尔信息所对应的精度极限。

4 总结与展望

介绍了量子精密测量的基本框架，对描述其精度极限的量子态演化、经典费舍尔信息、量子费舍尔信息及其对应的克拉美罗界进行总结，给出了量子精密测量的基本目标。然后分别对量子精密测量的三个基本路线进行分析归纳，即量子态制备与测量优化、量子演化过程调控优化、经典后处理优化等，并阐述了各基本方案的发展脉络和典型的算法，最后总结各方案存在的问题和可能的解决方案与未来发展途径。量子计算技术的飞速发展给量子精密测量技术带来了新的机遇。通过对量子精密测量最新的理论和实验进展进行分析总结，发现未来的量子精密测量方案朝着智能化、可编程化发展，即下一代可编程量子传感器。基于可编程量子计算的量子精密测量方案通过有效利用多体系统中的相变，也将会给多体量子物理与量子信息理论带来新的见解和认识。

参考文献

- [1] NIELSEN M A, CHUANG I L. Quantum computation and quantum information [M]. Cambridge University Press, 2010.
- [2] DEGEN C L, REINHARD F, CAPPELLARO P. Quantum sensing[J]. Reviews of Modern Physics, 2017, 89(3): 35002.
- [3] The LIGO Scientific Collaboration. A gravitational wave observatory operating beyond the quantum shot-noise limit [J]. Nature Physics, 2011, 7(12): 962-965.
- [4] WU Y, JELEZKO F, PLENIO M B, et al. Diamond quantum devices in biology [J]. Angewandte Chemie Interna-

- tional Edition, 2016, 55(23): 6586–6598.
- [5] ANTOINE C, BORDÉ C J. Quantum theory of atomic clocks and gravito-inertial sensors: an update[J]. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 2003, 5(2): S199.
- [6] GUO X, BREUM C R, BORREGAARD J, et al. Distributed quantum sensing in a continuous-variable entangled network [J]. *Nature Physics*, 2020, 16(3): 281–284.
- [7] ZHANG Z, ZHUANG Q. Distributed quantum sensing [J]. *Quantum Science and Technology*, 2021, 6(4): 43001.
- [8] GIOVANNETTI V, LLOYD S, MACCONE L. Quantum metrology [J]. *Physical Review Letters*, 2006, 96(1): 10401.
- [9] GIOVANNETTI V, LLOYD S, MACCONE L. Advances in quantum metrology [J]. *Nature Photonics*, 2011, 5(4): 222.
- [10] PARIS M G. Quantum estimation for quantum technology [J]. *International Journal of Quantum Information*, 2009, 7(S1): 125–137.
- [11] PEZZE L, SMERZI A. Quantum theory of phase estimation[J]. *arXiv Preprint arXiv:14115164*, 2014.
- [12] HELSTROM C W. Quantum detection and estimation theory [J]. *Journal of Statistical Physics*, 1969, 1(2): 231–252.
- [13] BRAUNSTEIN S L. Quantum limits on precision measurements of phase [J]. *Physical Review Letters*, 1992, 69(25): 3598.
- [14] SEVESO L, ROSSI M A, PARIS M G. Quantum metrology beyond the quantum Cramér-Rao theorem[J]. *Physical Review A*, 2017, 95(1): 12111.
- [15] CLERK A A, DEVORET M H, GIRVIN S M, et al. Introduction to quantum noise, measurement, and amplification[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2010, 82(2): 1155–1208.
- [16] BREUER H P, PETRUCCIONE F. The theory of open quantum systems[M]. 2007.
- [17] TSANG M. Quantum metrology with open dynamical systems[J]. *New Journal of Physics*, 2013, 15(7): 73005.
- [18] HAASE J F, SMIRNE A, HUELGA S, et al. Precision limits in quantum metrology with open quantum systems [J]. *Quantum Measurements and Quantum Metrology*, 2016, 5(1): 13–39.
- [19] LU X M, MA Z, ZHANG C. Generalized-mean Cramér-Rao bounds for multiparameter quantum metrology [J]. *Physical Review A*, 2020, 101(2): 22303.
- [20] YANG J, PANG S, ZHOU Y, et al. Optimal measurements for quantum multiparameter estimation with general states[J]. *Physical Review A*, 2019, 100(3): 32104.
- [21] GUDDER S. AS Holevo, Probabilistic and statistical aspects of quantum theory [J]. *Bulletin (New series) of the American Mathematical Society*, 1985, 13(1): 80–85.
- [22] LIU J, YUAN H, LU X M, et al. Quantum Fisher information matrix and multiparameter estimation [J]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2019, 53(2): 23001.
- [23] DEMKOWICZ-DOBZRAŃSKI R, GORECKI W, GUŤA M. Multi-parameter estimation beyond quantum Fisher information [J]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2020, 53(36): 363001.
- [24] PROCTOR T J, KNOTT P A, DUNNINGHAM J A. Multiparameter estimation in networked quantum sensors [J]. *Physical Review Letters*, 2018, 120(8): 80501.
- [25] HOU Z B, TANG J F, CHEN H, et al. Zero-trade-off multiparameter quantum estimation via simultaneously saturating multiple Heisenberg uncertainty relations [J]. *Science Advances*, 2021, 7(1): eabd2986.
- [26] BRAUNSTEIN S L, CAVES C M. Statistical distance and the geometry of quantum states [J]. *Physical Review Letters*, 1994, 72(22): 3439.
- [27] YUAN H, FUNG C H F. Quantum parameter estimation with general dynamics [J]. *NPJ Quantum Information*, 2017, 3(1).
- [28] YUAN H, FUNG C H F. Fidelity and Fisher information on quantum channels [J]. *New Journal of Physics*, 2017, 19(11).
- [29] HUANG H Y, CHEN S, PRESKILL J. Learning to predict arbitrary quantum processes [J]. *arXiv Preprint arXiv:221014894*, 2022.
- [30] HUANG H Y, KUENG R, TORLAI G, et al. Provably efficient machine learning for quantum many-body problems [J]. *Science*, 2022, 377(6613): eabk3333.
- [31] LIU J, ZHANG M, CHEN H, et al. Optimal scheme for quantum metrology [J]. *Advanced Quantum Technologies*, 2022, 5(1): 2100080.
- [32] TADDEI M M, ESCHER B M, DAVIDOVICH L, et al. Quantum speed limit for physical processes [J]. *Physical Review Letters*, 2013, 110(5): 50402.
- [33] OKUYAMA M, OHZEKI M. Quantum speed limit is not quantum [J]. *Physical Review Letters*, 2018, 120(7):

- 70402.
- [34] DEFFNER S, CAMPBELL S. Quantum speed limits: from Heisenberg's uncertainty principle to optimal quantum control[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2017, 50(45): 453001.
- [35] PIRES D P, CIANCIARUSO M, CÉLERI L C, et al. Generalized geometric quantum speed limits[J]. *Physical Review X*, 2016, 6(2): 21031.
- [36] YUAN H, FUNG C H F. Quantum metrology matrix[J]. *Physical Review A*, 2017, 96(1): 12310.
- [37] CAVES C M. Quantum-mechanical noise in an interferometer[J]. *Physical Review D*, 1981, 23(8): 1693.
- [38] LANG M D, CAVES C M. Optimal quantum-enhanced interferometry using a laser power source[J]. *Physical Review Letters*, 2013, 111(17): 173601.
- [39] LANG M D, CAVES C M. Optimal quantum-enhanced interferometry[J]. *Physical Review A*, 2014, 90(2): 25802.
- [40] MONRAS A. Optimal phase measurements with pure Gaussian states[J]. *Physical Review A*, 2006, 73(3): 33821.
- [41] ŠAFRÁNEK D, FUENTES I. Optimal probe states for the estimation of Gaussian unitary channels[J]. *Physical Review A*, 2016, 94(6): 62313.
- [42] BERRY D, WISEMAN H. Optimal states and almost optimal adaptive measurements for quantum interferometry[J]. *Physical Review Letters*, 2000, 85(24): 5098.
- [43] BERRY D W, WISEMAN H, BRESLIN J. Optimal input states and feedback for interferometric phase estimation[J]. *Physical Review A*, 2001, 63(5): 53804.
- [44] TAKEOKA M, SESHADREESAN K P, YOU C, et al. Fundamental precision limit of a Mach-Zehnder interferometric sensor when one of the inputs is the vacuum[J]. *Physical Review A*, 2017, 96(5): 52118.
- [45] AFEK I, AMBAR O, SILBERBERG Y. High-NOON states by mixing quantum and classical light[J]. *Science*, 2010, 328(5980): 879.
- [46] SCHNABEL R. Squeezed states of light and their applications in laser interferometers[J]. *Physics Reports*, 2017, 684: 1–51.
- [47] HU L Y, WEI C P, HUANG J H, et al. Quantum metrology with Fock and even coherent states: Parity detection approaches to the Heisenberg limit[J]. *Optics Communications*, 2014, 323: 68–76.
- [48] SESHADREESAN K P, KIM S, DOWLING J P, et al. Phase estimation at the quantum Cramér-Rao bound via parity detection[J]. *Physical Review A*, 2013, 87(4): 43833.
- [49] HUANG Z, MOTES K R, ANISIMOV P M, et al. Adaptive phase estimation with two-mode squeezed vacuum and parity measurement[J]. *Physical Review A*, 2017, 95(5): 53837.
- [50] MODI K, CABLE H, WILLIAMSON M, et al. Quantum correlations in mixed-state metrology[J]. *Physical Review X*, 2011, 1(2): 21022.
- [51] FIDERER L J, FRAÏSSE J M, BRAUN D. Maximal quantum Fisher information for mixed states[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 123(25): 250502.
- [52] CORREA L A, MEHBOUDI M, ADESSO G, et al. Individual quantum probes for optimal thermometry[J]. *Physical Review Letters*, 2015, 114(22): 220405.
- [53] DORNER U, DEMKOWICZ-DOBZANSKI R, SMITH B, et al. Optimal quantum phase estimation[J]. *Physical Review Letters*, 2009, 102(4): 40403.
- [54] FRÖWIS F, SKOTINIOTIS M, KRAUS B, et al. Optimal quantum states for frequency estimation[J]. *New Journal of Physics*, 2014, 16(8): 83010.
- [55] SINGER S, NELDER J. Nelder-mead algorithm[J]. *Scholarpedia*, 2009, 4(7): 2928.
- [56] KNOTT P. A search algorithm for quantum state engineering and metrology[J]. *New Journal of Physics*, 2016, 18(7): 73033.
- [57] POLI R, KENNEDY J, BLACKWELL T. Particle swarm optimization[J]. *Swarm Intelligence*, 2007, 1(1): 33–57.
- [58] MNIH V, BADIA A P, MIRZA M, et al. Asynchronous methods for deep reinforcement learning; proceedings of the International conference on machine learning, F, 2016 [C] // International conference on machine learning. PMLR, 2016: 1928–1937.
- [59] LILLICRAP T P, HUNT J J, PRITZEL A, et al. Continuous control with deep reinforcement learning[J]. *arXiv Preprint arXiv:150902971*, 2015.
- [60] XIA B, HUANG J, FANG C, et al. High-precision multiparameter weak measurement with hermite-gaussian pointer[J]. *Physical Review Applied*, 2020, 13(3): 34023.
- [61] BERRY D. Adaptive phase measurements[D]. Australia: the university of queensland, 2002.
- [62] POPE D, WISEMAN H, LANGFORD N. Adaptive phase estimation is more accurate than nonadaptive phase estimation for continuous beams of light[J]. *Physical Review A*, 2004, 70(4): 43812.

- [63] WANG X B, HIROSHIMA T, TOMITA A, et al. Quantum information with gaussian states [J]. *Physics Reports*, 2007, 448(1-4): 1-111.
- [64] FERRARO A, OLIVARES S, PARIS M G. Gaussian states in continuous variable quantum information[J]. *arXiv Preprint quant-ph/0503237*, 2005.
- [65] BRAUNSTEIN S L, VAN LOOCK P. Quantum information with continuous variables[J]. *Reviews of Modern physics*, 2005, 77(2): 513.
- [66] HENTSCHEL A, SANDERS B C. Machine learning for precise quantum measurement [J]. *Physical Review Letters*, 2010, 104(6): 63603.
- [67] PENG Y, FAN H. Feedback ansatz for adaptive-feedback quantum metrology training with machine learning [J]. *arXiv Preprint arXiv:191003181*, 2019.
- [68] LUMINO A, POLINO E, RAB A S, et al. Experimental phase estimation enhanced by machine learning[J]. *arXiv Preprint arXiv:171207570*, 2017.
- [69] PALITTAPONGARNPIM P, WITTEK P, ZAHEDINEJAD E, et al. Learning in quantum control: high-dimensional global optimization for noisy quantum dynamics[J]. *Neurocomputing*, 2017, 268: 116-126.
- [70] PALITTAPONGARNPIM P, WITTEK P, SANDERS B C. Robustness of learning - assisted adaptive quantum - enhanced metrology in the presence of noise; proceedings of the Systems, Man, and Cybernetics (SMC), 2017 IEEE international conference on, F, 2017 [C]. *IEEE*.
- [71] LOVETT N B, CROSNIER C, PERARNAU-LLOBET M, et al. Differential evolution for many - particle adaptive quantum metrology[J]. *Physical Review Letters*, 2013, 110(22): 220501.
- [72] WISEMAN H M. Adaptive phase measurements of optical modes: Going beyond the marginal q distribution [J]. *Physical Review Letters*, 1995, 75(25): 4587.
- [73] ARMEN M A, AU J K, STOCKTON J K, et al. Adaptive homodyne measurement of optical phase[J]. *Physical Review Letters*, 2002, 89(13): 133602.
- [74] OLIVARES S, PARIS M G. Bayesian estimation in homodyne interferometry[J]. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2009, 42(5): 55506.
- [75] BERNI A A, GEHRING T, NIELSEN B M, et al. Ab-initio quantum enhanced optical phase estimation using real-time feedback control [J]. *Nature Photonics*, 2015, 9(9): 577.
- [76] TSANG M. Time-symmetric quantum theory of smoothing [J]. *Physical Review Letters*, 2009, 102(25): 250403.
- [77] WHEATLEY T, BERRY D, YONEZAWA H, et al. Adaptive optical phase estimation using time-symmetric quantum smoothing [J]. *Physical Review Letters*, 2010, 104(9): 93601.
- [78] WIEBE N, GRANADE C. Efficient Bayesian phase estimation[J]. *Physical Review Letters*, 2016, 117(1): 10503.
- [79] XIAO T L, HUANG J Z, FAN J P, et al. Continuous-variable quantum phase estimation based on machine learning [J]. *Scientific Reports*, 2019, 9(1): 1-13.
- [80] FIDERER L J, SCHUFF J, BRAUN D. Neural-network heuristics for adaptive bayesian quantum estimation [J]. *PRX Quantum*, 2021, 2(2): 20303.
- [81] SONG Q, LI H, HUANG J, et al. Adaptive time-varying parameter estimation via weak measurement[J]. *Physical Review Applied*, 2022, 18(4): 44031.
- [82] SONG Q, XIA B, HUANG J, et al. Surpassing the nyquist sampling limit via postmodulation [J]. *Physical Review Applied*, 2022, 18(3): 34077.
- [83] YUAN H. Sequential feedback scheme outperforms the parallel scheme for hamiltonian parameter estimation [J]. *Physical Review Letters*, 2016, 117(16).
- [84] HOU Z B, WANG R J, TANG J F, et al. Control-enhanced sequential scheme for general quantum parameter estimation at the heisenberg limit[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 123(4): 40501. 1-40501. 6.
- [85] PANG S, JORDAN A N. Optimal adaptive control for quantum metrology with time-dependent Hamiltonians[J]. *Nature Communications*, 2017.
- [86] YANG J, PANG S, CHEN Z, et al. Variational principle for optimal quantum controls in quantum metrology [J]. *Physical Review Letters*, 2022, 128(16): 160505.
- [87] LIU J, YUAN H. Quantum parameter estimation with optimal control [J]. *Physical Review A*, 2017, 96(1).
- [88] LIU J, YUAN H. Control-enhanced multiparameter quantum estimation [J]. *Physical Review A*, 2017, 96(4): 42114. 1-42114. 11.
- [89] XIAO T L, FAN J P, ZENG G H. Parameter estimation in quantum sensing based on deep reinforcement learning [J]. *NPJ Quantum Information*, 2022, 8(1): 1-12.
- [90] XU H, LI J, LIU L, et al. Generalizable control for quantum parameter estimation through reinforcement learning [J]. *NPJ Quantum Information*, 2019, 5(1): 1-8.
- [91] FÖSEL T, TIGHINEANU P, WEISS T, et al. Reinforcement learning with neural networks for quantum feedback

- [J]. *Physical Review X*, 2018, 8(3):31084.
- [92] YU M, LI D, WANG J, et al. Experimental estimation of the quantum Fisher information from randomized measurements[J]. *Physical Review Research*, 2021, 3(4): 43122.
- [93] RATH A, BRANCIARD C, MINGUZZI A, et al. Quantum Fisher information from randomized measurements [J]. *Physical Review Letters*, 2021, 127(26): 260501.
- [94] BECKEY J L, CERESO M, SONE A, et al. Variational quantum algorithm for estimating the quantum Fisher information [J]. *Physical Review Research*, 2022, 4(1): 13083.
- [95] KESSLER E M, LOVCHINSKY I, SUSHKOV A O, et al. Quantum error correction for metrology [J]. *Physical Review Letters*, 2014, 112(15): 150802.
- [96] DÜR W, SKOTINIOTIS M, FROEWEIS F, et al. Improved quantum metrology using quantum error correction [J]. *Physical Review Letters*, 2014, 112(8): 80801.
- [97] UNDEN T, BALASUBRAMANIAN P, LOUZON D, et al. Quantum metrology enhanced by repetitive quantum error correction [J]. *Physical Review Letters*, 2016, 116(23): 230502.
- [98] ZHOU S S, ZHANG M, PRESKILL J, et al. Achieving the Heisenberg limit in quantum metrology using quantum error correction [J]. *Nature Communications*, 2018, 9(1): 1–11.
- [99] LAYDEN D, CAPPELLARO P. Spatial noise filtering through error correction for quantum sensing [J]. *NPJ Quantum Information*, 2018, 4(1): 1–6.
- [100] LAYDEN D, ZHOU S S, CAPPELLARO P, et al. Ancilla-free quantum error correction codes for quantum metrology [J]. *Physical Review Letters*, 2019, 122(4): 40502.
- [101] ZHOU S S, JIANG L. Optimal approximate quantum error correction for quantum metrology [J]. *Physical Review Research*, 2020, 2(1): 13235.
- [102] SHETTELL N, MUNRO W J, MARKHAM D, et al. Practical limits of error correction for quantum metrology [J]. *New Journal of Physics*, 2021, 23(4): 43038.
- [103] ROJKOV I, LAYDEN D, CAPPELLARO P, et al. Bias in error-corrected quantum sensing [J]. *Physical Review Letters*, 2022, 128(14): 140503.
- [104] WANG W, CHEN Z J, LIU X, et al. Quantum-enhanced radiometry via approximate quantum error correction [J]. *Nature Communications*, 2022, 13(1): 1–8.
- [105] BAHRI Y, VOSK R, ALTMAN E, et al. Localization and topology protected quantum coherence at the edge of hot matter [J]. *Nature Communications*, 2015, 6(1): 1–6.
- [106] ZHOU S S, LIU Z W, JIANG L. New perspectives on covariant quantum error correction [J]. *Quantum*, 2021, 5: 521.
- [107] GÓRZECKI W, ZHOU S, JIANG L, et al. Optimal probes and error-correction schemes in multi-parameter quantum metrology [J]. *Quantum*, 2020, 4: 288.
- [108] KUBICA A, DEMKOWICZ-DOBRAŃSKI R. Using quantum metrological bounds in quantum error correction: A simple proof of the approximate eastin-knill theorem [J]. *Physical Review Letters*, 2021, 126(15): 150503.
- [109] CIMINI V, POLINO E, VALERI M, et al. Calibration of multiparameter sensors via machine learning at the single-photon level [J]. *Physical Review Applied*, 2021, 15(4): 44003.
- [110] CIMINI V, GIANANI I, SPAGNOLO N, et al. Calibration of quantum sensors by neural networks [J]. *Physical Review Letters*, 2019, 123(23): 230502.
- [111] NOLAN S, SMERZI A, PEZZÈ L. A machine learning approach to Bayesian parameter estimation [J]. *NPJ Quantum Information*, 2021, 7(1): 1–8.
- [112] NOLAN S P, PEZZÈ L, SMERZI A. Frequentist parameter estimation with supervised learning [J]. *AVS Quantum Science*, 2021, 3(3): 34401.
- [113] BAN Y, ECHANOBE J, DING Y, et al. Neural-network-based parameter estimation for quantum detection [J]. *Quantum Science and Technology*, 2021, 6(4): 45012.
- [114] CHEN Y, BAN Y, HE R, et al. A neural network assisted $^{171}\text{Yb}^+$ quantum magnetometer [J]. *arXiv Preprint arXiv: 220305849*, 2022.
- [115] CIMINI V, VALERI M, POLINO E, et al. Deep reinforcement learning for quantum multiparameter estimation [J]. *arXiv Preprint arXiv: 220900671*, 2022.
- [116] ALDERETE C H, GORDON M H, SAUVAGE F, et al. Inference-based quantum sensing [J]. *Physical Review Letters*, 2022, 129(19): 190501.
- [117] KOCZOR B, ENDO S, JONES T, et al. Variational-state quantum metrology [J]. *New Journal of Physics*, 2020, 22(8): 83038.
- [118] MEYER J J, BORREGAARD J, EISERT J. A variational toolbox for quantum multi-parameter estimation [J]. *NPJ Quantum Information*, 2021, 7(1): 1–5.
- [119] KAUBRUEGGER R, SILVI P, KOKAIL C, et al. Variational spin-squeezing algorithms on programmable quantum sensors [J]. *Physical Review Letters*, 2019, 123(26):

- 260505.
- [120]KAUBRUEGGER R, VASILYEV D V, SCHULTE M, et al. Quantum variational optimization of Ramsey interferometry and atomic clocks[J]. Physical Review X, 2021, 11(4): 41045.
- [121]MARCINIAK C D, FELDKER T, POGORELOV I, et al. Optimal metrology with programmable quantum sensors [J]. Nature, 2022, 603(7902): 604–609.
- [122]ZHUANG Q T, ZHANG Z S. Physical-layer supervised learning assisted by an entangled sensor network [J]. Physical Review X, 2019, 9(4): 41023.
- [123]XIA Y, LI W, ZHUANG Q, et al. Quantum-enhanced data classification with a variational entangled sensor network [C]//Conference on Lasers and Electro-Optics. Optical Society of America, 2021.
- [124]CHU Y, ZHANG S, YU B, et al. Dynamic framework for criticality-enhanced quantum sensing[J]. Physical Review Letters, 2021, 126(1): 10502.
- [125]LIU R, CHEN Y, JIANG M, et al. Experimental critical quantum metrology with the Heisenberg scaling [J]. NPJ Quantum Information, 2021, 7(1): 1–7.
- [126]DING D S, LIU Z K, SHI B S, et al. Enhanced metrology at the critical point of a many-body rydberg atomic system [J]. Nature Physics, 2022: 1–6.
- [127]ILIAS T, YANG D, HUELGA S F, et al. Criticality-enhanced quantum sensing via continuous measurement [J]. PRX Quantum, 2022, 3(1): 10354.
- [128]MONTENEGRO V, MISHRA U, BAYAT A. Global sensing and its impact for quantum many-body probes with criticality [J]. Physical Review Letters, 2021, 126(20): 200501.
- [129]GONG M, HUANG H L, WANG S Y, et al. Quantum neuronal sensing of quantum many-body states on a 61-qubit programmable superconducting processor [J]. arXiv Preprint arXiv:220105957, 2022.

(本文编辑: 田艳玲)



第一作者: 肖太龙(1996—)男, 博士, 主要研究方向为量子精密测量与量子人工智能。



通讯作者: 曾贵华(1966—)男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为量子信息、量子传感等。