

doi: 10.11823/j.issn.1674-5795.2025.05.07

# 广义 Grover 量子行走中的聚类现象

张伟伟<sup>1\*</sup>, 陈佐维<sup>1</sup>, 赵伟<sup>2\*</sup>, 杨北亚<sup>1</sup>, 贾恒越<sup>3</sup>, 潘炜<sup>1</sup>, 史豪斌<sup>1</sup>

(1. 西北工业大学 计算机学院, 陕西 西安 710129;

2. 保密通信全国重点实验室, 四川 成都 610041; 3. 中央财经大学 信息学院, 北京 100081)

**摘要:** 为探索量子行走在计量方面的应用, 提出了含任意控制参数的广义 Grover 量子行走与分步 Grover 量子行走。研究了相应聚类现象和模型可调参数的关联性, 具体分析了控制参数在量子行走演化中的作用, 发现行走者的演化速度在参数空间的聚类分布与行走者量子态中的纠缠在参数空间的聚类分布呈现出一致性, 进一步探究了不同聚类中行走者的概率分布。探讨了 Grover 量子行走的实验实现方案, 论述了 Grover 量子行走在计量领域的应用, 指出 Grover 量子行走对于实现高精度传感、拓扑序精确测量以及提升态层析效率具有重要意义。研究成果为推动量子行走信息处理技术发展提供了有力支撑。

**关键词:** 量子行走; 聚类; Grover 搜索; 关联性; 演化速度; 纠缠; 概率分布; 计量应用

中图分类号: TB9; O413; TP212 文献标志码: A 文章编号: 1674-5795 (2025) 05-0068-11

## Cluster phenomenon in generalized Grover's quantum walks

ZHANG Weiwei<sup>1\*</sup>, CHEN Zuowei<sup>1</sup>, ZHAO Wei<sup>2\*</sup>, YANG Beiya<sup>1</sup>, JIA Hengyue<sup>3</sup>, PAN Wei<sup>1</sup>, SHI Haobin<sup>1</sup>

(1. School of Computer Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China;

2. National Key Laboratory of Security Communication, Chengdu 610041, China;

3. School of Information, Central University of Finance and Economics, Beijing 100081, China)

**Abstract:** To explore the application of quantum walks in metrology, generalized Grover quantum walks and step-wise Grover quantum walks with arbitrary control parameters are proposed. The correlation between the corresponding clustering phenomena and the model's adjustable parameters were studied. The role of control parameters in the evolution of quantum walks was analyzed, revealing a clustering phenomenon based on control parameters: the evolution speed of the walker shows consistency with the entanglement between its coin space and position space. Further investigation into the probability distribution of the walker in different clusters shows that the probability distributions in each cluster exhibit different characteristics. In some clusters, the distribution tends to be concentrated, while in others, it is more dispersed. The experimental implementation of Grover quantum walks is discussed, and the applications of Grover quantum walks in metrology are addressed, highlighting their significance in achieving high-precision sensing, topological order measurement, and enhanced state tomography efficiency. The research findings provide strong support for the development of quantum walk-based information processing technologies.

收稿日期: 2024-12-06; 修回日期: 2025-01-14

基金项目: 国家自然科学基金项目(62571434, 12104101); 中央高校基本科研业务费专项资金项目; 保密通信全国重点实验室稳定支持计划项目(2023); 国家自然科学基金重大项目(92267110); 国家自然科学基金联合基金项目(U22B2025); 陕西省重点研发计划项目(2023-GHZD-42)

引用格式: 张伟伟, 陈佐维, 赵伟, 等. 广义 Grover 量子行走中的聚类现象[J]. 计测技术, 2025, 45(5): 68-78.

Citation: ZHANG W W, CHEN Z W, ZHAO W, et al. Cluster phenomenon in generalized Grover's quantum walks[J]. Metrology & Measurement Technology, 2025, 45(5): 68-78.



**Key words:** quantum walks; clustering phenomena; Grover search; correlation; evolution speed; entanglement; probability distribution; application in metrology

## 0 引言

量子技术因其在信息处理中的优势而备受青睐，尤其在优化任务<sup>[1-4]</sup>、解决复杂数学问题<sup>[5-8]</sup>以及密码学<sup>[9]</sup>等领域。量子行走是经典随机行走的量子力学对应形式，是构建量子算法的高级工具，研究人员已证明量子行走构成了一种通用的量子计算<sup>[10-11]</sup>模型。随着量子技术的发展，量子行走已在多种实验平台<sup>[12]</sup>上实现，包括线性光学<sup>[13-16]</sup>、冷原子<sup>[17]</sup>、离子阱<sup>[18-19]</sup>、超导电路<sup>[20]</sup>、腔量子电动力学<sup>[21]</sup>(Cavity Quantum Electrodynamics, CQED)以及硅芯片<sup>[22-24]</sup>等，这使得量子行走成为多种应用的自然模拟基准。

近几十年，量子行走的应用已扩展至复杂系统的研究领域，包括拓扑材料<sup>[25-29]</sup>、搜索算法<sup>[30]</sup>、网页排序算法<sup>[31-34]</sup>、计量算法<sup>[35-36]</sup>等。量子行走作为强大的量子信息处理模拟平台，其粒子演化空间涵盖位置空间及扮演硬币角色的粒子内部自由度。拓扑量子行走的研究源于标准量子行走的分步生成，其中单一量子旋转充当硬币操作，而行走者的位移操作被分成2个独立的、自旋依赖的移位操作，并在其中插入额外的硬币旋转<sup>[25]</sup>。在量子行走中观察到的量子拓扑现象包括粒子的手性偏移以及粒子在拓扑相边界的局域化。通过设计具有不同对称性的量子行走演化算符公式，工程化的量子拓扑行走表现出不同的特征。相比之下，Grover量子行走的研究进展相对较慢。近期，研究人员通过在基础的Szegedy量子行走中引入任意相位旋转，对量子网页排序算法进行了改进，从而打破了残余节点的简并性并能够检测经典算法<sup>[33-34]</sup>忽略的次要枢纽。

为进一步探索Grover量子行走在计量方面的应用，本文提出2种具有任意控制参数的广义Grover量子行走，探究控制参数在量子行走演化中的作用，分析行走者的演化速度以及行走者硬币空间与位置空间之间的纠缠，发现了基于控制参数的聚类现象，之后针对行走者在不同聚类中的概率

分布进行研究，并讨论Grover量子行走在计量领域的潜在应用，为相关领域的科研工作者提供借鉴。

## 1 模型

本节介绍2种广义的Grover量子行走，并提出将任意控制参数集成到这2种广义Grover量子行走中的拓展方案——交替Grover量子行走(Alternating Grover Quantum Walk, AGQW)以及分步交替Grover量子行走(Stepwise Spin Alternating Grover Quantum Walk, SS-AGQW)。

### 1.1 2种广义的Grover量子行走

标准的Grover量子行走是一个二维量子行走模型<sup>[37-39]</sup>，包括1个位于二维晶格上的行走者及2个硬币，其中行走者位置的基为 $\{|x, y\rangle |x \in [-N, N], y \in [-N, N]\}$ ，硬币的基为 $\{|\uparrow, \uparrow\rangle, |\downarrow, \uparrow\rangle, |\uparrow, \downarrow\rangle, |\downarrow, \downarrow\rangle\}$ 。行走者的演化由酉算符控制，即

$$U = S \cdot G \quad (1)$$

式中： $U$ 为演化算符， $G$ 为Grover硬币算符， $S$ 为移位算符。 $G$ 和 $S$ 的计算公式为

$$G = \frac{1}{2} \mathbf{1} - \mathbf{I} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} S = & |x+1, y+1, \uparrow, \uparrow\rangle \langle x, y, \uparrow, \uparrow| + \\ & |x-1, y+1, \downarrow, \uparrow\rangle \langle x, y, \downarrow, \uparrow| + \\ & |x+1, y-1, \uparrow, \downarrow\rangle \langle x, y, \uparrow, \downarrow| + \\ & |x-1, y-1, \downarrow, \downarrow\rangle \langle x, y, \downarrow, \downarrow| \end{aligned} \quad (3)$$

式中： $\mathbf{1}$ 为元素全为1的矩阵， $\mathbf{I}$ 为单位矩阵。

#### 1.1.1 广义Grover量子行走-I

标准Grover量子行走的一个推广方法是在Grover硬币算符中引入任意相位旋转，称为Grover Quantum Walk-I，即GQW-I，其定义如式(4)所示，灵感来源于文献[33]。

$$G_i(\theta) = \frac{1 - e^{i\theta}}{4} \mathbf{1} - \mathbf{I} \quad (4)$$

式中： $G_i(\theta)$ 为第I种Grover硬币算符， $\theta$ 为角度，i

为虚数符号。

硬币依赖的移位算符与标准 Grover 量子行走中的硬币依赖移位算符相同，即式(3)。设  $\theta = \pi \text{ rad}$ ，得到标准 Grover 量子行走的硬币算符，即式(2)。

### 1.1.2 广义 Grover 量子行走-II

标准 Grover 量子行走的另一个推广方法是在 Grover 硬币算符中引入控制变量  $p$ ，称为 GQW-II，其定义为<sup>[40-41]</sup>

$$G_{\text{II}}(p) = \begin{pmatrix} -p & q & \sqrt{pq} & \sqrt{pq} \\ q & -p & \sqrt{pq} & \sqrt{pq} \\ \sqrt{pq} & \sqrt{pq} & -q & p \\ \sqrt{pq} & \sqrt{pq} & p & -q \end{pmatrix} \quad (5)$$

式中： $G_{\text{II}}(p)$  为第 II 种 Grover 硬币算符； $p$  和  $q$  为控制变量， $q = 1 - p$ ，且  $p \in (0, 1)$ 。硬币依赖的移位算符与标准 Grover 量子行走中的硬币依赖移位算符相同，即式(3)。当  $p = q = (1/2)$  时，得到标准 Grover 量子行走的硬币算符，即式(2)。

## 1.2 交替 Grover 量子行走

### 1.2.1 AGQW-I

交替的广义 Grover 量子行走-I(AGQW-I)是通过连接 2 个具有不同相位的广义 Grover 量子行走-I 定义的，如式(6)所示。

$$U_1 = S \cdot G_1(\theta_2)S \cdot G_1(\theta_1) \quad (6)$$

式中： $U_1$  为第 I 种演化算符， $\theta_1$  为角度 1， $\theta_2$  为角度 2。

量子行走的一个重要优势是其演化速度  $O(t)$ ，而经典随机行走的演化速度为  $O(\sqrt{t})$ ，量子行走的演化速度通常比经典随机行走更快。演化速度的斜率通过行走者概率分布标准差  $\sigma$  的变化速度来评估，即斜率为  $\partial\sigma / \partial t$ ，其中  $t$  为演化时间。量子行走的一个重要特性是其演化速度的斜率为常数。因此，演化速度的斜率是表征量子行走的关键特征。

通过考虑相应的演化速度来分析在式(4)中定义的广义 GQW-I 中额外旋转相位的影响。在所有模拟中，将初始硬币状态设为  $1/2$  ( $|\uparrow\rangle, |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle, |\downarrow\rangle$ )，而行走者的初始位置为  $|x = 0, y = 0\rangle$ 。标准 GQW、标准 AGQW-I 以及分步 AGQW-I 设置  $\theta_2 = 0.3\pi \text{ rad}$  时的粒子演化速

度如图 1 所示，其中，具有任意相位的广义 GQW 的演化速度如图 1 的星形蓝线所示，可以看到演化速度在  $\theta > 0 \text{ rad}$  和  $\theta < 0 \text{ rad}$  之间是对称的。

图 2 显示了 AGQW-I 的演化速度分布，当  $\theta_2 > 0 \text{ rad}$  时，演化速度的峰值向负  $\theta_1$  方向移动；当  $\theta_2 < 0 \text{ rad}$  时，演化速度的峰值向正  $\theta_1$  方向移动。可以通过数据拟合确保 AGQW-I 演化峰的  $\{\check{\theta}_2, \check{\theta}_1\}$  值之间具有线性相关性，即

$$\check{\theta}_2 = -1.2\check{\theta}_1 \quad (7)$$

式中： $\check{\theta}_1, \check{\theta}_2$  为 AGQW-I 的演化角度。

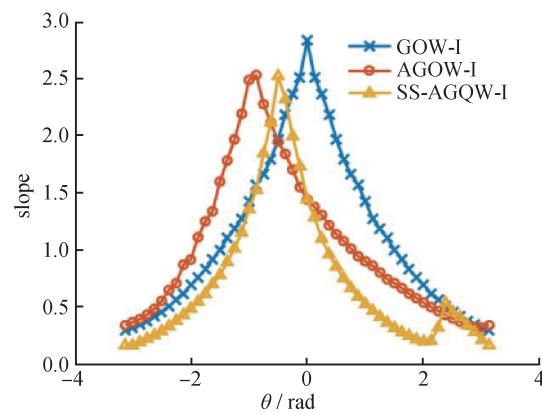
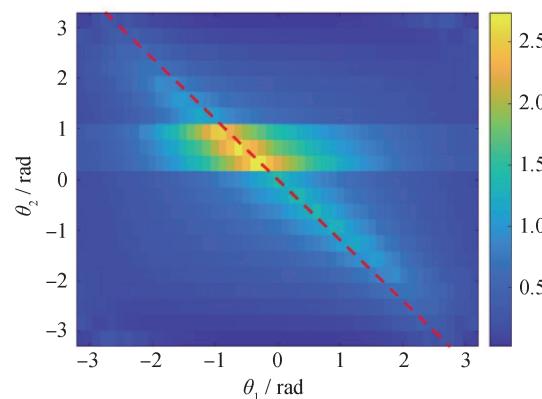


图 1 标准 GQW-I、标准 AGQW-I 以及分步 SS-AGQW-I  
设置  $\theta_2 = 0.3\pi \text{ rad}$  时的粒子演化速度图

Fig.1 Particle evolution velocity plot for the standard GQW-I,  
standard AGQW-I, and SS-AGQW-I with  $\theta_2 = 0.3\pi \text{ rad}$



注：红色虚线代表演化速度峰值位置的参数  $\theta_1, \theta_2$  之间的关联性。

图 2 AGQW-I 的演化速度

Fig.2 Evolution velocity of AGQW-I

### 1.2.2 AGQW-II

交替的广义 Grover 量子行走-II(AGQW-II)是通过连接 2 个具有不同参数  $p$  的广义 Grover 量子行走-

II定义的，即

$$U_{\text{II}} = S \cdot G_{\text{II}}(p_2)S \cdot G_{\text{II}}(p_1) \quad (8)$$

式中： $U_{\text{II}}$ 为第II种演化算符， $p_1$ 和 $p_2$ 为控制变量。

AGQW-II的演化速度分布如图3所示，显示出演化速度的2个峰值向 $p_1$ 的中心方向移动。例如，当 $p_2 = 0.3$ 时，AGQW中 $p_1$ 方向的演化峰速度的位移如图4的圆形红线所示。

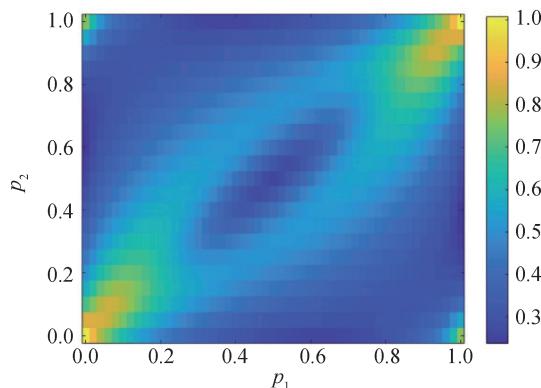


图3 在 $\{p_1, p_2\}$ 参数空间AGQW-II的粒子演化速度分布

Fig.3 Particle evolution velocity distribution of AGQW-II in the  $\{p_1, p_2\}$  parameter space

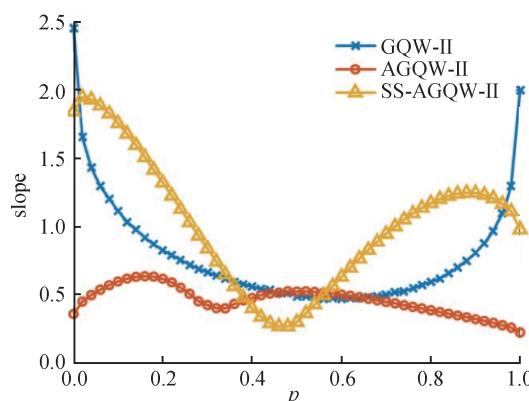


图4 标准GQW-II、标准AGQW-II以及SS-AGQW-II设置 $p_2 = 0.3$ 时的粒子演化速度

Fig.4 Particle evolution velocity for the standard GQW-II, standard AGQW-II, and SS-AGQW-II with  $p_2 = 0.3$

### 1.3 分步交替Grover量子行走

#### 1.3.1 SS-AGQW-I

第I种分步Grover量子行走SS-AGQW-I的幺正演化算符定义为

$$u_i = S \cdot G_i(\theta_1)S_y \cdot G_i(\theta_2)S_x \cdot G_i(\theta_1) \quad (9)$$

式中： $u_i$ 为幺正演化算符， $S_y$ 为 $y$ 轴位移算符， $S_x$ 为 $x$ 轴位移算符， $S_y$ 和 $S_x$ 的计算公式为

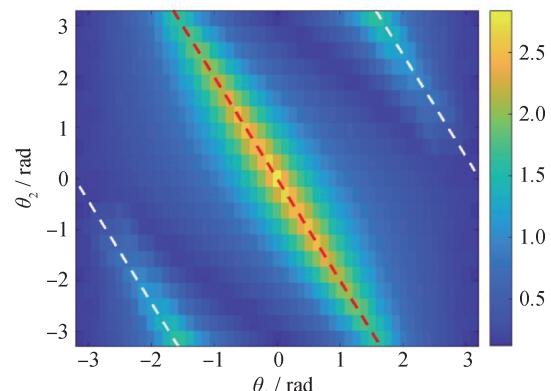
$$\begin{aligned} S_y &= |x, y+1, \uparrow, \uparrow\rangle \langle x, y, \uparrow, \uparrow| + \\ &|x, y+1, \downarrow, \uparrow\rangle \langle x, y, \downarrow, \uparrow| + \\ &|x, y-1, \uparrow, \downarrow\rangle \langle x, y, \uparrow, \downarrow| + \\ &|x, y-1, \downarrow, \downarrow\rangle \langle x, y, \downarrow, \downarrow| \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} S_x &= |x+1, y, \uparrow, \uparrow\rangle \langle x, y, \uparrow, \uparrow| + \\ &|x-1, y, \downarrow, \uparrow\rangle \langle x, y, \downarrow, \uparrow| + \\ &|x+1, y, \uparrow, \downarrow\rangle \langle x, y, \uparrow, \downarrow| + \\ &|x-1, y, \downarrow, \downarrow\rangle \langle x, y, \downarrow, \downarrow| \end{aligned} \quad (11)$$

量子行走的演化速度斜率在连续时间量子行走<sup>[42]</sup>中见证了拓扑相及其相变。通过演化速度研究分步AGQW-I中的演化簇。如图5所示，当设置不同的 $\theta_2$ 值时，分步AGQW-I中出现了额外的演化速度峰，将其称为新演化相的出现。当 $\theta_2$ 为正值时，主导演化速度峰向负 $\theta_1$ 方向移动，并出现了额外的演化速度峰。在2个峰之间存在一个“拐点”，该拐点为演化相的过渡点。通过数据拟合确保SS-AGQW-I主导演化峰的 $\{\check{\theta}_2^d, \check{\theta}_1^d\}$ 值之间的相关性呈现出线性关系，即

$$\check{\theta}_2^d = -2\check{\theta}_1^d \quad (12)$$

式中： $\check{\theta}_1^d$ 、 $\check{\theta}_2^d$ 分别为红线演化峰的角度值1和角度值2。



注：红线和白线分别代表演化速度峰值位置的参数

$\theta_1$ 、 $\theta_2$ 之间的关联性。

图5 SS-AGQW-I的演化速度

Fig.5 Evolution velocity of SS-AGQW-I

通过数据拟合确保SS-AGQW-I中出现的演化峰的 $\{\check{\theta}_2^e, \check{\theta}_1^e\}$ 值之间的相关性也呈现出线性关系，即

$$\check{\theta}_2^e = -2\check{\theta}_1^e + [\text{Sgn}(\check{\theta}_1^e)] \cdot 6.43 \quad (13)$$

式中： $\check{\theta}_2^e$ 、 $\check{\theta}_1^e$  分别为白线演化峰的角度值 2 和角度值 1。

图 1 中黄色三角标识线展示了在  $\theta_2 = 0.3\pi$  rad 的分步 AGQW 中演化峰速度的出现。

在不同的演化相中，行走者概率分布的演化模式表现出不同的特征。粒子的概率分布图如图 6 所示，其中， $x$ 、 $y$  为格点数索引，无单位。在新出现的演化相中，行走者的概率分布形成环状结构；在主导演化相中，行走者的概率分布则呈现扩散状态，占据大部分区域。

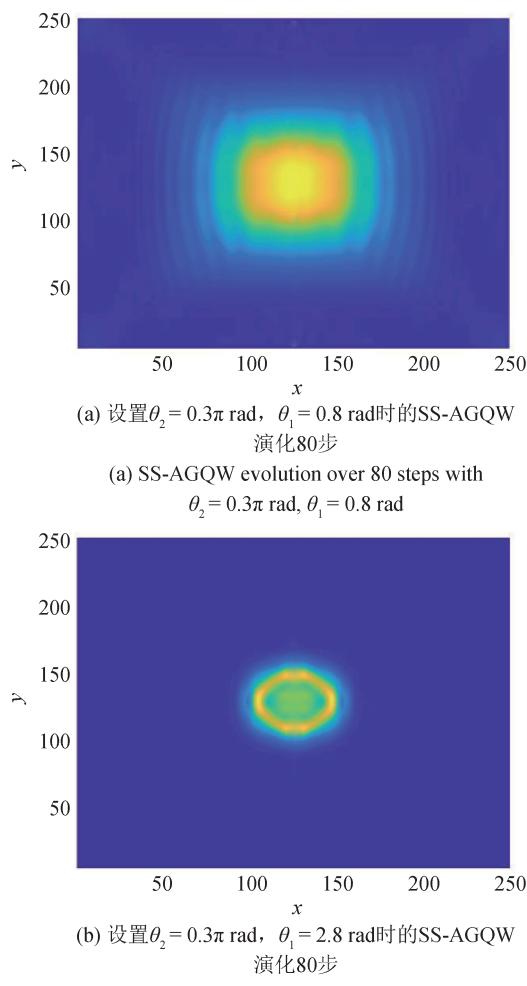
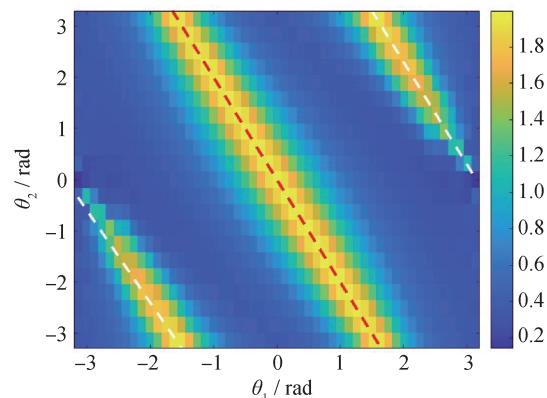


图 6 粒子的概率分布图

Fig.6 Probability distribution diagram of particles

在演化过程中，行走者的硬币空间与位置空间发生纠缠，这 2 个自由度之间的纠缠出现了与本课题组在演化速度分布中发现的相分布一致的演化相，如图 7 所示。图 5 中标记主导和新出现的演

化峰位置的红线和白线，与图 7 中标记主导和新出现的纠缠峰位置的红线和白线相匹配，并且相关参数关系遵循式(12)和式(13)。



注：纠缠度的值为  $T = 50 \sim 60$  之间的平均值，3 条线为纠缠度处于峰值时拟合的  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  之间的关系。

图 7 在可调参数  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  空间粒子的硬币空间和位置空间自由度的纠缠分布

Fig.7 Distribution of entanglement between the coin space and position space degrees of freedom of particles in the adjustable parameter  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  space

对于支持新出现的演化速度峰相和主导演化速度峰的参数生成的状态，其纠缠接近最大值 2。在长时间演化极限下，纠缠通过平均纠缠来评估，并确保行走者的波包未达到晶格边界。由于演化过程是幺正的，系统始终保持在纯态中，因此可以使用硬币的简化密度矩阵的熵  $H$  来量化硬币与粒子位置之间的纠缠，即

$$H = -\sum_j \lambda_j \log_2 \lambda_j \quad (14)$$

式中： $\{\lambda_j\}$  为时刻  $t$  下硬币简化密度矩阵的特征值，在二维晶格 SS-AGQW-I 情况下，有 4 个特征值。

### 1.3.2 SS-AGQW-II

第 II 种分步 Grover 量子行走 SS-AGQW-II 的幺正演化算符  $u_{II}$  定义为

$$u_{II} = S \cdot G_{II}(p_1) S_y \cdot G_{II}(p_2) S_x \cdot G_{II}(p_1) \quad (15)$$

SS-AGQW-II 的演化速度模式相对于  $\{p_1, p_2\}$  如图 8 所示，可以看到，对于固定的  $p_2$ ，2 峰之间的距离比 AGQW-II 更大，且 SS-AGQW-II 的最高速度值高于 AGQW-II 情况中的最高值。本课题组还研究了 SS-AGQW-II 的纠缠分布，在可调参数  $p_1$ 、 $p_2$  空间的粒子的硬币空间和位置空间自由度的纠缠的分布如图 9 所示，其模式与演化速度分布相匹配。

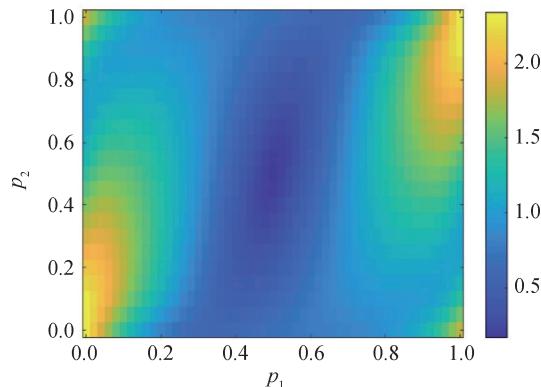
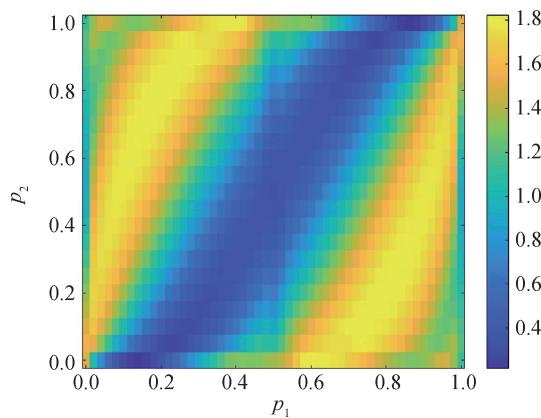


图8 在 $\{p_1, p_2\}$ 参数空间SS-AGQW-II的粒子演化速度分布

Fig.8 Particle evolution velocity distribution of SS-AGQW-II in the  $\{p_1, p_2\}$  parameter space



注：纠缠度的值为 $T=50\sim60$ 之间的平均值。

图9 在可调参数 $p_1$ 、 $p_2$ 空间粒子的硬币空间和位置空间自由度的纠缠分布

Fig.9 Distribution of entanglement between the coin space and position space degrees of freedom of particles in the adjustable parameter  $p_1$ 、 $p_2$  space

#### 1.4 关于2种交替Grover量子行走模型的解析研究

将式(4)中的广义硬币算符重新表述为 $\mathcal{G}$ , 即  

$$\mathcal{G} = \alpha I \otimes I + \beta (\sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_x \otimes I + I \otimes \sigma_x) \quad (16)$$
式中:  $\alpha$  和  $\beta$  均为比例系数,  $\alpha = -(3 + e^{i\theta})/4$ ,  $\beta = (1 - e^{i\theta})/4$ ;  $\sigma_x$  为泡利矩阵。

将式(5)中的广义硬币算符重新表述为 $\mathcal{G}_1$ , 即

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 = & -p\left(\frac{I + \sigma_z}{2}\right) \otimes 1 - q\left(\frac{I - \sigma_z}{2}\right) \otimes 1 + \\ & q\left(\frac{I + \sigma_z}{2}\right) \otimes \sigma_x + p\left(\frac{I - \sigma_z}{2}\right) \otimes \sigma_x + \quad (17) \\ & \sqrt{pq} \sigma_x \otimes \sigma_x + \sqrt{pq} \sigma_x \otimes I \end{aligned}$$

式中:  $p$  和  $q$  为控制变量,  $p + q = 1$ ,  $p \geq 0$ ,  $q \leq 0$ 。

硬币依赖平移算符  $S$  在动量空间可以重新表述为

$$S(k_x, k_y) = \begin{pmatrix} e^{-i(k_x + k_y)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(k_x - k_y)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(-k_x + k_y)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i(k_x + k_y)} \end{pmatrix} \quad (18)$$

式中:  $k_x$ 、 $k_y$  分别为  $x$  轴、 $y$  轴方向动量索引,  $k_x$ 、 $k_y$  均无单位。

分步硬币  $S_x$ 、 $S_y$  依赖平移算符在动量空间可以重新表述为

$$S_x(k_x, k_y) = \begin{pmatrix} e^{-i(k_x)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(k_x)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(-k_x)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i(k_x)} \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$S_y(k_x, k_y) = \begin{pmatrix} e^{-i(k_y)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(k_y)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(-k_y)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i(k_y)} \end{pmatrix} \quad (20)$$

由于模型具有平移对称性, 在动量空间中研究 SS-AGQW-I 演化的性质。通过将式(16)、式(18)、式(20)代入式(9), 可以在动量空间中表示 SS-AGQW-I 的幺正算符  $u_1$ 。本课题组研究了演化算符  $u_1$  的能带结构, 发现其能带结构与新出现的演化相密切相关。具体而言, 模拟粒子在  $131 \times 131$  大小的二维格子上的演化, 并通过调节 Grover 算符中的参数来研究对应系统的能带图。设置  $\theta_2 = 0.3\pi$  rad 时 SSAGQW-I 对应的系统能带图如图 10 所示, 其中不同的颜色用于区分不同的本征模。本文中, 所有计算设置约化普朗克常量  $\hbar = 1$ ; 本征能量(Energy)单位为 J, 其数量级与系统哈密顿量数量级一致。根据图 10(a)可知, 在主导演化峰区域, 上下能带的结构主要由线性色散关系主导, 且能量  $\propto k_x$ , 使波包演化速度较快; 图 10(b)展示了过渡区域的能带结构; 在图 10(c)所示的新出现的演化峰区域, 上下能带的结构主要由类似余弦的关系主导, 且能量  $\propto \cos(k_x)$ , 波包演化速度随  $\theta_1$  的变化相较主导演化区域的变化更慢。

由于模型具有平移对称性, 在动量空间中研究 SS-AGQW-II 演化的性质。将式(17)、式(18)、

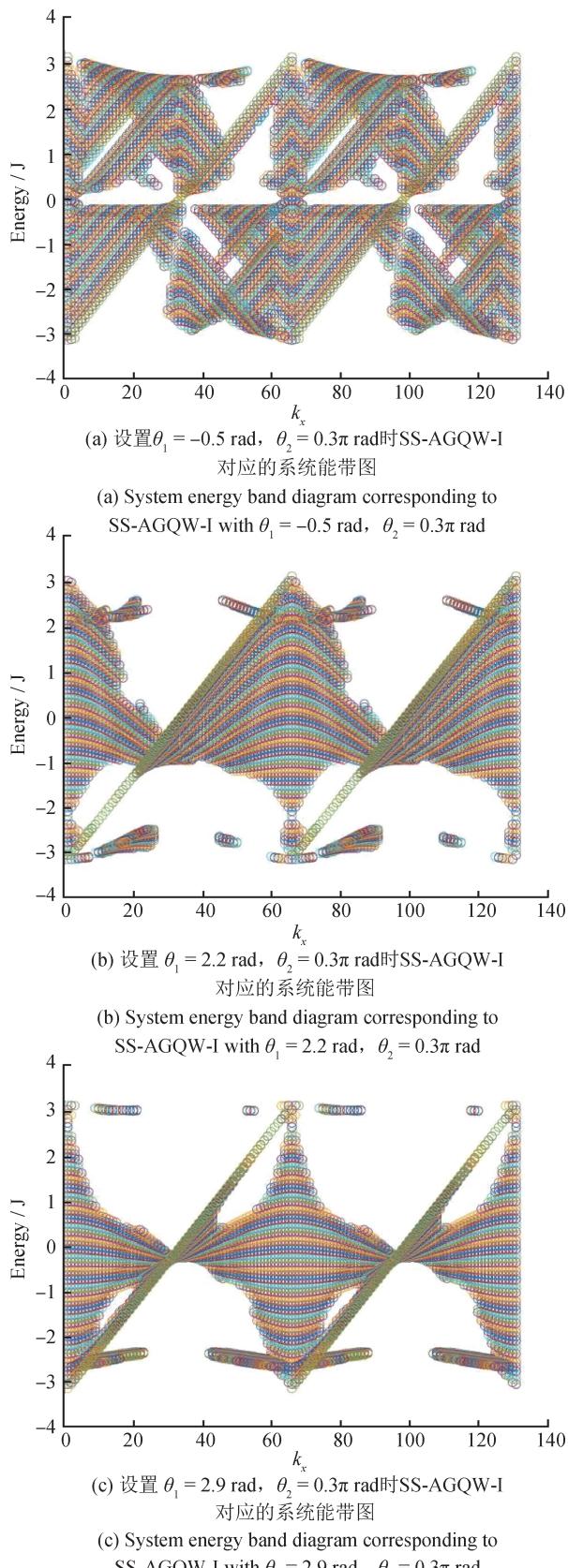
图 10 设置  $\theta_2 = 0.3\pi \text{ rad}$  时 SS-AGQW-I 对应的系统能带图

Fig.10 System energy band diagram corresponding to SS-AGQW-I with  $\theta_2 = 0.3\pi \text{ rad}$

式(19)、式(20)代入式(15)，可以在动量空间中表示 SS-AGQW-II 的幺正算符  $u_{II}$ 。本课题组研究了演化算符  $u_{II}$  的能带结构，发现其能带结构与新出现的演化聚类密切相关。具体而言，设置  $p_2 = 0.3$  的 SS-AGQW-II 对应的系统能带图如图 11 所示，在主导演化峰区域，上下能带的结构中(能量  $\propto$  本征模式)正线性色散的数量显示出明显的规模。在图 11(a)中，正线性色散的数量较多；在图 11(b)中，正线性色散消失时有明显的直线分隔；在图 11(c)中，正线性色散的数量很少。

通过研究聚类空间的典型参数点所对应系统的能带结构，发现在本文所设计的 Grover 量子行走中，粒子演化速度以及粒子硬币和空间自由度的纠缠聚类现象与对应系统的能带结构中本征模式的耗散关系紧密，当耗散关系呈现线性以及呈现  $\cos$  函数形式时，粒子的聚类在不同区域，且耗散关系过渡的参数位置为聚类的边界位置。

## 2 Grover 量子行走的实验实现

Grover 量子行走是一种二维硬币空间量子行走，其实验实现相较传统量子行走方案具有一定的难度，主要难点在于硬币操作(特别是高维硬币操作)的实现对实验平台的调控能力要求较高。目前可实现 Grover 量子行走的实验平台包括基于光学技术的实验平台<sup>[43-45]</sup>、基于超导芯片的实验平台<sup>[20]</sup>、基于冷原子的实验平台<sup>[28]</sup>等，每种平台在操作中都体现了模型的异化使用原理，即通过实验条件对理论模型进行调整，使其在现实中得以实现。

基于光学技术实现 Grover 量子行走的实验平台的原理：通过设计时间复用构型，使光纤网络能够发送衰减的单光子脉冲，模拟离散时间量子行走的演化过程。光纤环路中的每个完整周期代表一个时间步长，而系统中的关键光学元件(如半波片、偏振分束器和四分之一波片)则用于实现时间演化算符的操作。光子的位置态通过时间离散位移进行编码，硬币态则由光子的偏振模式表征，在实验中有效分离了量子行走的空间和偏振模式。这种方式不仅满足了 Grover 量子行走对硬币操作的要求，还通过灵活的编码技术，使实验在硬件资源受限的情况下具备高度可操作性。模型异化的

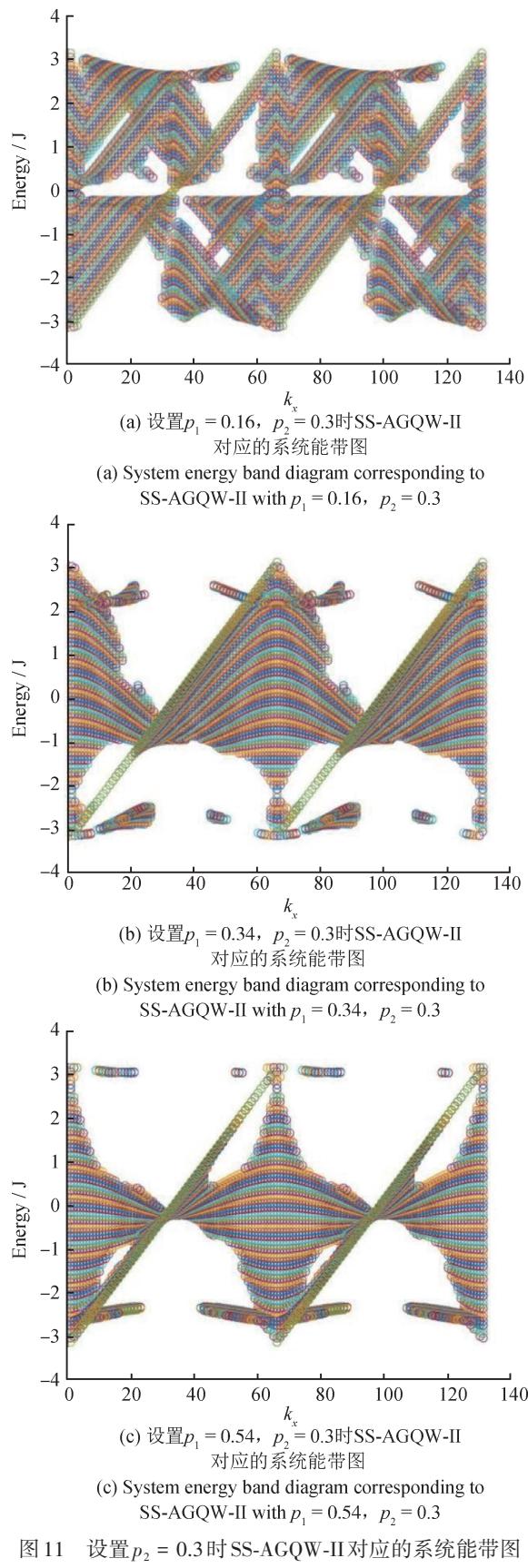
图11 设置 $p_2 = 0.3$ 时SS-AGQW-II对应的系统能带图

Fig.11 System energy band diagram corresponding to SS-AGQW-II with  $p_2 = 0.3$

关键在于利用光子2个内态自由度(如极化、路径、动量等)来编码理论模型中的硬币空间,从而实现高维硬币操作的实验化。

基于超导芯片实现Grover量子行走的实验平台的原理:依托超导芯片的高度可编程性,通过调控芯片中量子比特的频率、隧穿幅和拓扑结构,实现对量子行走路径的精确控制。以马赫-曾德尔干涉仪为基础,通过调整量子比特间的连接方式,构建出满足Grover量子行走要求的路径结构。在这一实现过程中,硬币操作和位置态之间的动态耦合通过调整芯片参数得以实现,为研究二维硬币量子行走提供了极大的灵活性。通过调整超导量子比特之间的耦合方式以及相应的耦合系数实现模型的异化,灵活模拟理论中的高维硬币操作,同时保持实验系统的稳定性和可控性。

基于冷原子实现Grover量子行走的实验平台的原理:利用动量晶格技术实现超冷原子在动量空间中的离散量子行走。通过设计交错周期性驱动的拉曼光场,实验成功实现对动量空间中原子的精确调控。可通过调整实验条件,调节原子之间的碰撞相互作用以及动量空间类晶格结构中相邻格点的耦合强度之比,从而动态呈现Grover量子行走的演化过程。在这一过程中,模型的异化核心是通过动量空间的类晶格构建,间接实现二维硬币操作的物理模拟。

综上所述,尽管Grover量子行走的实验实现具有较高的技术难度,但通过基于光学技术、超导芯片和冷原子平台的异化操作,能够对理论模型进行验证,为探索更高维量子行走和复杂量子系统特性提供了重要途径。模型的异化在不同平台中体现出独特性,反映了实验设计对理论模型的适应能力。

### 3 Grover量子行走在计量领域的应用

目前,量子行走方案在计量领域的应用涵盖以下方面:实现广义测量、提高态层析效率、实现量子材料拓扑序测量、实现量子散射计量等<sup>[45-47]</sup>。本文所提出的Grover量子行走模型中可调参数的实现与实验平台模型中的某些物理量相关,为这些物理量的计量提供了有效途径(例如可用于粒子所处

环境中势场参数的计量等)。此外,本文所提出的Grover量子行走具有更强的可调控性,在计量领域具有重要优势。下面具体介绍Grover量子行走在计量领域的典型应用。

### 3.1 基于量子行走的高精度传感

通过调控Grover量子行走模型的初始态和硬币操作,可精确感知和测量外部势场的特性。例如,在冷原子平台中,通过引入具有特定周期调制的外部势场,可实现对量子行走者动态演化路径的控制。利用这一特性,可以测量环境中势场的强度和分布,通过统计行走者在不同位置的分布概率,进一步反推势场的微小变化。这种方法在量子传感器领域具备应用潜力,例如探测微弱的电场、磁场或引力场变化等。

### 3.2 量子行走在拓扑序测量中的应用

通过设计Grover量子行走的模型参数,可以模拟拓扑材料的边界态行为,用于拓扑序的精确测量。例如,在光学量子行走实验中,通过设置特定的边界条件(如改变光纤网络的结构)或在晶格中引入特定势垒,可以观测到模拟拓扑材料的边界效应,包括反射、透射和局域化等现象。结合Grover量子行走中行走者的初始态及演化规律,可以高效识别拓扑材料中的边界态,并定量测量其性质(如能隙大小、拓扑保护特性等),为拓扑器件设计及计量提供新方法。

### 3.3 基于量子行走的广义测量与态层析应用

薛鹏教授课题组利用量子行走实现了对单量子比特的广义测量,即正定算符测量。将待测信息加载于硬币的初始态,经过依赖于位置的量子行走过程,携带不同初始硬币态的行走者会走到不同的位置,通过对行走者的位置进行正定测量,完成了对待测硬币初始态的正定算符测量。随着正定算符测量集合中元素数目的增加,只需增加量子行走的演化时间即可实现正定算符的测量,无需扩展辅助比特的维度,从而降低了实验难度,增加了可实现性与可扩展性。

郭光灿院士团队通过光子量子行走实现了确定性的集体测量,并将其应用于量子比特态层析,获得了极高的层析效率。在传统的量子信息处理中,对单个量子系统逐一进行测量往往无法有效提取信

息,而基于量子行走的集体测量突破了这一局限,能够提取更多信息,提高测量精度,为量子计量学中的态估计等问题提供更有效的解决方案。

### 3.4 实现拓扑材料边界态探测

在一些基于光子、原子等的量子行走实验中,可通过设计合适的边界条件和势垒,模拟拓扑材料的边界,进而探测边界态的存在和特性。例如,研究人员通过操控光子的量子行走,观察到了光子在边界处的反射、透射和局域化等现象,这些现象与拓扑材料的边界态具有相似特征,为研究拓扑序提供了有效手段<sup>[16]</sup>。

### 3.5 实现量子散射计量

将量子粒子在一维势垒上的散射问题形式化为具有杂质的晶格上的连续时间量子行走,使用量子费希尔信息量化势垒高度的最大估计精度,通过合适的行走者初始态,推导出散射态的反射和透射概率,从而实现对散射参数的计量。研究发现,量子费希尔信息受初始波包的宽度和中心动量影响,而量子信噪比的这种依赖性较弱,且量子费希尔信息为二分位置测量提供了一种极佳的检测方案。

## 4 结论

提出了2种广义Grover量子行走——AGQW和SS-AGQW,并构建了相应模型。分析了AGQW-I中演化速度峰值的位移,观察到SS-AGQW-I中额外演化速度峰值的出现。此外,研究发现:行走者演化状态中的纠缠及SS-AGQW-I演化过程中形成的行走者概率分布模式,与可调相位旋转 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 呈现相似的相位分布。针对AGQW-II和SS-AGQW-II开展研究,也得到了相同的结果。通过进一步研究SS-AGQW-II的能带结构,分析演化速度相的形成,发现能带结构中系统的耗散特性与演化相现象密切相关。最后,探讨了模型中可调参数与聚类现象的关联性在计量领域的应用。研究成果为基于量子行走的信息处理提供了新的演化调控方法,为量子网页排序算法、量子网络以及量子搜索算法的设计提供了重要参考。

## 参考文献

- [1] PATTI T L, KOSSAIFI J, ANANDKUMAR A, et al. Varia-

- tional quantum optimization with multi - basis encodings [J]. *Physical Review Research*, 2022, 4(3): 033142.
- [2] KOLOTOUROS I, WALLDEN P. Evolving objective function for improved variational quantum optimization [J]. *Physical Review Research*, 2022, 4(2): 023225.
- [3] KING A D, RAYMOND J, LANTING T, et al. Quantum critical dynamics in a 5 000-qubit programmable spin glass [J]. *Nature*, 2023, 617(7959): 61–66.
- [4] LYKOV D, WURTZ J, POOLE C, et al. Sampling frequency thresholds for the quantum advantage of the quantum approximate optimization algorithm [J]. *NPJ Quantum Information*, 2023, 9(1): 73(2023).
- [5] ARUTE F, ARYA K, BABBUSH R, et al. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor [J]. *Nature*, 2019, 574(7779): 505–510.
- [6] ZHONG H S, WANG H, DENG Y H, et al. Quantum computational advantage using photons [J]. *Science*, 2020, 370(6523): 1460–1463.
- [7] ZHU Q L, CAO S R, CHEN F S, et al. Quantum computational advantage via 60-qubit 24-cycle random circuit sampling[J]. *Science Bulletin*, 2022, 67(3): 240–245.
- [8] SPAGNOLO N, BROD D J, GALVÃO E F, et al. Non-linear boson sampling [J]. *NPJ Quantum Information*, 2023, 9(1): 3(2023).
- [9] GISIN N, RIBORDY G, TITTEL W, et al. Quantum cryptography [J]. *Reviews of Modern Physics*, 2002, 74(1): 145–195.
- [10] CHILDS A M. Universal computation by quantum walk [J]. *Physical Review Letters*, 2009, 102(18). 180501.
- [11] VENEGAS-ANDRACA S E. Quantum walks: a comprehensive review [J]. *Quantum Information Processing*, 2012, 11(5): 1015–1106.
- [12] MANOUCHEHRI K, WANG J. Physical implementation of quantum walks [M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 2014.
- [13] SU Q P, ZHANG Y, YU L, et al. Experimental demonstration of quantum walks with initial superposition states [J]. *NPJ Quantum Information*, 2019, 5(1): 40(2019).
- [14] WANG X, ZHAN X, LI Y, et al. Generalized quantum measurements on a higher-dimensional system via quantum walks[J]. *Physical Review Letters*, 2023, 131(15): 150803.
- [15] GAO H X, WANG K K, QU D K, et al. Demonstration of a photonic router via quantum walks [J]. *New Journal of Physics*, 2023, 25(5): 053011.
- [16] CHEN C, LIU R Z, WU J Z, et al. Berry curvature and bulk - boundary correspondence from transport measurement for photonic Chern bands [J]. *Physical Review Letters*, 2023, 131(13): 133601.
- [17] MUGEL S, CELI A, MASSIGNAN P, et al. Topological bound states of a quantum walk with cold atoms[J]. *Physical Review A*, 2016, 94(2): 023631.
- [18] ZÄHRINGER F, KIRCHMAIR G, GERRITSMA R, et al. Realization of a quantum walk with one and two trapped ions [J]. *Physical Review Letters*, 2010, 104 (10) : 100503.
- [19] ALDERETE C H, SINGH S, NGUYEN N H, et al. Quantum walks and Dirac cellular automata on a programmable trapped - ion quantum computer [J]. *Nature Communications*, 2020, 11(1): 3720.
- [20] GONG M, WANG S Y, ZHA C, et al. Quantum walks on a programmable two - dimensional 62-qubit superconducting processor[J]. *Science*, 2021, 372(6545): 948–952.
- [21] CUI W X, XING Y, QI L, et al. Quantum walks in periodically kicked circuit QED lattice [J]. *Optics Express*, 2020, 28(9): 13532–13541.
- [22] BLANCO - REDONDO A, BELL B, SEGEV M, et al. Photonic quantum walks with symmetry protected topological phases[C]// American Institute of Physics Conference Series, 2017: 4998022.
- [23] JIAO Z Q, GAO J, ZHOU W H, et al. Two-dimensional quantum walks of correlated photons[J]. *Optica*, 2021, 8(9): 1129–1135.
- [24] QIANG X G, WANG Y Z, XUE S C, et al. Implementing graph-theoretic quantum algorithms on a silicon photonic quantum walk processor[J]. *Science Advances*, 2021, 7(9): 8375.
- [25] KITAGAWA T, RUDNER M S, BERG E, et al. Exploring topological phases with quantum walks [J]. *Physical Review A*, 2010, 82(3): 033429.
- [26] KITAGAWA T, BROOME M A, FEDRIZZI A, et al. Observation of topologically protected bound states in photonic quantum walks[J]. *Nature Communications*, 2012, 3(1): 1872.
- [27] ZHAN X, XIAO L, BIAN Z H, et al. Detecting topological invariants in nonunitary discrete-time quantum walks [J]. *Physical Review Letters*, 2017, 119(13): 130501.
- [28] XIE D Z, DENG T S, XIAO T, et al. Topological quantum walks in momentum space with a Bose-Einstein condensate [J]. *Physical Review Letters*, 2020, 124 (5) :

- 050502.
- [29] OSTAHIÉ B, STICLET D, MOCA C P, et al. Multiparticle quantum walk: a dynamical probe of topological many-body excitations[J]. Physical Review B, 2023, 108(3): 035126.
- [30] MARSH S, WANG J B. A framework for optimal quantum spatial search using alternating phase-walks[J]. Quantum Science and Technology, 2021, 6(4): 045029.
- [31] PAPARO G D, MUELLER M, COMELLAS F, et al. Quantum Google algorithm construction and application to complex networks [J]. European Physical Journal Plus, 2014, 129(7): 150.
- [32] WANG K K, SHI Y H, XIAO L, et al. Experimental realization of continuous-time quantum walks on directed graphs and their application in PageRank [J]. Optica, 2020, 7(11): 1524–1530.
- [33] ORTEGA S A, MARTIN-DELGADO M A. Generalized quantum PageRank algorithm with arbitrary phase rotations [J]. Physical Review Research, 2023, 5(1): 013061.
- [34] ZHANG W W, WU Z P, JIA H Y, et al. Quantum versatility in PageRank [J]. Physical Review Research, 2024, 6(4): 043163.
- [35] ANNABESTANI M, HASSANI M, TAMASCELLI D, et al. Multiparameter quantum metrology with discrete - time quantum walks[J]. Physical Review A, 2022, 105(6): 062411.
- [36] SINGH S, HAMILTON C S, JEX I. Phase estimation in driven discrete-time quantum walks[J]. Physical Review A, 2023, 108(4): 042607.
- [37] MACKAY T D, BARTLETT S D, STEPHENSON L T, et al. Quantum walks in higher dimensions[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2002, 35(12): 2745–2753.
- [38] CARNEIRO I, LOO M, XU X, et al. Entanglement in coined quantum walks on regular graphs[J]. New Journal of Physics, 2005, 7(1): 1367–2630(05)98776–4.
- [39] ZHANG R, XUE P. Two-dimensional quantum walk with position-dependent phase defects[J]. Quantum Information Processing, 2014, 13(8): 1825–1839.
- [40] WATABE K, KOBAYASHI N, KATORI M, et al. Limit distributions of two-dimensional quantum walks[J]. Physical Review A: Atomic, Molecular, and Optical Physics, 2008, 77(6): 062331.
- [41] MACHIDA T, CHANDRASHEKAR C M, KONNO N, et al. Limit distributions for different forms of four-state quantum walks on a two-dimensional lattice[J]. Quantum Information & Computation, 2015, 15 (13 / 14) : 1248–1258.
- [42] ZHANG W W, SANDERS B C, APERS S, et al. Detecting topological transitions in two dimensions by Hamiltonian evolution[J]. Physical Review Letters, 2017, 119(19) : 197401.
- [43] CHEN C, DING X, QIN J, et al. Topological spin texture of chiral edge states in photonic two-dimensional quantum walks[J]. Physical Review Letters, 2022, 129(4): 1–6.
- [44] LIN Q, YI W, XUE P. Manipulating directional flow in a two-dimensional photonic quantum walk under a synthetic magnetic field [J]. Nature Communications, 2023, 14 (1): 6283.
- [45] WANG Q Q, DONG S J, LI X W, et al. Efficient learning of mixed-state tomography for photonic quantum walk[J]. Science Advances, 2024, 10(11): 4871.
- [46] BIAN Z H, LI J, QIN H, et al. Realization of single-qubit positive-operator-valued measurement via a one-dimensional photonic quantum walk[J]. Physical Review Letters, 2015, 114(20): 203602.
- [47] ZATELLI F, BENEDETTI C, PARIS M G A. Scattering as a quantum metrology problem: a quantum walk approach[J]. Entropy, 2020, 22(11): 1321.

(本文编辑: 刘圣晨)

**第一/通信作者:** 张伟伟(1987—), 女, 副教授, 博士, 主要研究方向为量子技术。



**通信作者:** 赵伟(1983—), 女, 正高级工程师, 博士, 主要研究方向为密码学、隐私计算等。

