

doi: 10.11823/j.issn.1674-5795.2025.04.11

基于金属材料多阶谐振的杨氏模量动态测量方法

刘复乐¹, 祖洪飞², 陈章位^{3*}

(1. 浙江大学 流体动力基础件与机电系统全国重点实验室, 浙江 杭州 310058;

2. 浙江理工大学 机械工程学院, 浙江 杭州 310018;

3. 杭州亿恒科技有限公司, 浙江 杭州 310015)

摘 要: 为了准确分析金属材料的功能特性并测试其结构稳定性, 基于欧拉-伯努利梁理论, 提出了一种通过分析材料前两阶谐振频率来计算动态杨氏模量的多阶谐振法; 并搭建了以高频激振器和激光测振仪为核心的动态实验系统, 该系统具备宽广的动态范围、精准控制测量的能力和优越的抗干扰性。针对4种金属材料进行测试, 计算、统计和分析了杨氏模量的平均值与变异系数, 验证了该方法具有较高的精准性、一致性和鲁棒性, 同时有效避免了传统静态测试中应变测量工具和内部结构变化带来的影响。本研究为推动各向同性金属及非金属材料性能测试与结构分析等领域的发展提供了重要支持。

关键词: 杨氏模量; 多阶谐振频率; 欧拉-伯努利梁; 高频激振器

中图分类号: TG115; TB383 **文献标志码:** A **文章编号:** 1674-5795 (2025) 04-0149-09

Dynamic measurement of Young's modulus based on multi-order resonance of metallic materials

LIU Fule¹, ZU Hongfei², CHEN Zhangwei^{3*}

(1. The State Key Laboratory of Fluid Power and Mechatronic Systems, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China;

2. School of Mechanical Engineering, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China;

3. Econ Technology Co., Ltd., Hangzhou 310015, China)

Abstract: To accurately analyze the functional characteristics of metallic materials and test their structural stability, based on the Euler-Bernoulli beam theory, a multi-order resonance method is proposed to calculate the dynamic Young's modulus by analyzing the first- and second-order resonant frequencies of the material; and a dynamic test system with a high-frequency exciter and a laser vibrometer as the core is built. The system has a wide dynamic range, precise control and measurement capabilities, and excellent anti-interference. Four kinds of metal materials were tested, and their average values and coefficients of variation of Young's modulus were calculated, statistically analyzed. It is verified that the method has high accuracy, consistency and robustness, while effectively avoiding the influence of strain measurement tools and internal structure changes in traditional static tests. This study provides important support for the development of performance testing and structural analysis of isotropic metals and non-metallic materials.

Key words: Young's modulus; multi-order resonant frequency; Euler-Bernoulli beams; high frequency exciter

收稿日期: 2025-02-10; 修回日期: 2025-05-07

基金项目: 国家科技重大专项资助项目(2025ZD1601200)

引用格式: 刘复乐, 祖洪飞, 陈章位. 基于金属材料多阶谐振的杨氏模量动态测量方法[J]. 计测技术, 2025, 45(4): 149-157.

Citation: LIU F L, ZU H F, CHEN Z W. Dynamic measurement of Young's modulus based on multi-order resonance of metallic materials[J]. Metrology & Measurement Technology, 2025, 45(4): 149-157.



0 引言

杨氏模量是用于表征材料在受到拉力或者压力时的刚度特征的重要参数,是金属材料最重要的力学特征之一。它在结构工程设计、航空航天、汽车制造和微电子等领域发挥着重要作用,基于其能够精确计算材料及结构在受力时的变形情况,从而保证相关工程结构和产品的安全性和可靠性。无论是在新材料的研发阶段,还是在产品的实际使用过程中,杨氏模量都是极为重要的性能指标。

文献[1-2]描述了多种静态、准静态与动态的测量技术。在静态与准静态测试中,通过缓慢施加负载,使材料发生显著形变。通常使用应变片或引伸计来测量样品的应变,然而,这些工具的安装过程、环境适应性以及温度效应等因素会影响测量结果的准确性及可靠性。此外,由于实验过程中材料的内部结构发生改变,可能会使测量结果偏离真实值。相比之下,在动态测试方法中,共振频率的获取方式更加可靠,且材料的形变小,能够提供更为准确的杨氏模量测量结果^[3]。

目前,常见的动态测量方法包括共振法和超声波法^[4-5]。超声波法基于超声波在材料中的传递特性进行测量,该方法对于样品的表面质量和环境条件具有较高的要求;共振法的原理是:当激励样品时,样品会产生显著的共振现象,而共振频率由样品的尺寸、质量及杨氏模量等参数共同决定。共振法测量材料杨氏模量更加简单易行,并且不容易受到材料和环境的限制。因此,可通过测量共振频率来反向推导杨氏模量。

根据美国材料与实验协会(American Society for Testing and Materials, ASTM)标准 E1876-22^[6],共振法可分为3种振动模式:基本弯曲(面内弯曲和面外弯曲)共振、基本扭转共振和基本纵向共振。3种方法均可通过外界激励(如机械激励^[7-8]或声学激励^[9]),使特定质量、形状和尺寸的样品发生共振。随后,信号分析仪对传感器收集到的材料振动信号进行处理,经过频谱分析后获得共振频率,并结合质量和尺寸参数计算动态杨氏模量。然而,高频共振点的激励、测量和分析是共振法的技术难点。多数研究主要集中于对一阶共振频率的分

析,而对高阶谐振频率的探讨则相对不足。

一种常用的脉冲激励方法是通过力锤对样品进行激励^[8, 10-14],然后测量并分析样品的振动信号。然而这种方法的精度不高。高频激振器^[15-16]对样品进行激励,其强度和频率等参数可调,且利用闭环控制在各个频段内实现加速度和推力的精确调整,有效降低了人为操作和环境因素所产生的影响,有较高的一致性。特别是针对脆弱和精密结构进行测试时,高频激振器可以精确调整激励参数,保证样品的完整性。目前,国内针对高频激振器领域的研究仍处于发展阶段,这主要归因于高频激振技术的复杂性和制造工艺的高要求。

振动信号一般使用加速度传感器或麦克风^[17]进行测量,其容易受到附加质量以及背景噪声的影响。激光测振仪能够在非接触的情况下获取样品材料或结构部件上的振动数据,并隔绝背景噪声,被广泛用于各种材料甚至特殊材料的测量:如三聚氰胺泡沫^[2]、蛋壳^[9]和犬松质骨^[18]等。

本文提出了一种基于多阶谐振的杨氏模量动态测量方法。该方法通过高频激振器对金属材料样品进行激励,并利用激光测振仪精确测量其前两阶谐振频率,进而利用这些频率数据精确计算出杨氏模量。将计算结果与标准数据库中的数据对比,验证本方法的精确性和可靠性。

1 研究方法

1.1 测量系统

待测样品呈矩形梁状,通过夹具将样品安装在高频激振器上。由加速度传感器和激光测振仪实时采集输入与输出的时域信号。利用频谱平滑处理以及去噪滤波技术提高信号的分辨力和准确度,并通过快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform, FFT)将时域信号转换为频域信号。频响函数(Frequency Response Function, FRF)定义为频域内输出与输入信号的比值,能够表示样品的频率响应特性。通过对幅频响应和相频响应的分析,可获取样品的前两阶谐振频率,用于进一步计算杨氏模量,系统整体布局如图1所示。

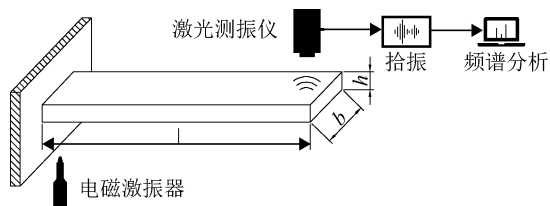


图1 系统整体布局

Fig.1 The overall layout of the system

1.2 欧拉-伯努利梁理论计算杨氏模量

ASTM E1876-22 《Standard test method for dynamic Young's modulus, shear modulus, and poisson's ratio by impulse excitation of vibration》^[6]和 GB/T 22315-2008 《金属材料 弹性模量和泊松比试验方法》^[19]均采用基于自由约束的脉冲激励方法, ISO 16940: 2008 《Glass in building-glazing and airborne sound insulation-measurement of the mechanical impedance of laminated glass》^[20]建议使用前三阶谐振频率。实验结果表明: 前两阶的精准度已符合要求。目前, 大多数研究仅基于第一阶谐振频率^[21]进行计算, 但这种方法鲁棒性不足; 相比之下, 前两阶谐振频率可以提供更加全面的动态信息, 使测量结果更加可靠。因此, 本文使用弯曲共振下的前两阶谐振频率计算样品的杨氏模量, 并进行对比验证。

欧拉-伯努利梁理论主要考虑梁的横向加速度引起的弯曲变形和惯性力, 同时忽略剪切变形和转动惯量的影响。在梁的长径比较大时, 该理论能够提供较高的精度。该模型的运动微分方程易于求出解析解, 被广泛用于动态法测量杨氏模量^[22-24]。欧拉-伯努利梁的弯曲过程如图2所示, 以平行于长边的方向为 x 轴, 以固定边界至自由边界的方向为正方向, 建立直角坐标系。

动态条件下的欧拉-伯努利梁方程如式(1)所示。

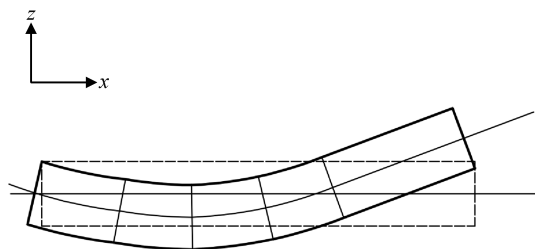


图2 弯曲的欧拉-伯努利梁

Fig.2 Curved Euler-Bernoulli beam

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) = -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q(x) \quad (1)$$

式中: x 为 x 轴上的取值, E 为杨氏模量, I 为梁横截面的面积二阶矩, w 为挠度, μ 为单位长度的质量, t 为时间, q 为由外部载荷引起的势能。

对于各向同性材料, 可以假设梁的质量分布均匀, E 与 I 都相对于 x 独立。当形位公差在允许范围内时, 该假设对结果不会产生显著影响, 这一点将在第3节的数据分析中体现。对式(1)进行如下简化

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (2)$$

在缺乏横向载荷的环境中, 自由振动方程得以建立。此方程的解可以通过对位移进行FFT, 将其分解成一系列简谐振动的叠加来获得。若考虑多阶谐振, 其通解如式(3)所示。

$$w = Q_1 \cosh(\beta_n x) + Q_2 \sinh(\beta_n x) + Q_3 \cos(\beta_n x) + Q_4 \sin(\beta_n x) \text{ with } \beta_n = (\frac{\mu \omega_n^2}{EI})^{0.25} \quad (3)$$

式中: β_n 为中间变量, Q_1 、 Q_2 、 Q_3 、 Q_4 为不同的常数, ω_n 为梁在第 n 阶模态下的固有频率。

一组常数对应于特定的一组边界条件, 位移的解依赖于频率。不同的边界条件(如自由边界条件、夹紧边界条件等)会对通解的系数产生影响^[25]。在本实验中, 研究对象为一端夹紧、一端自由的悬臂梁结构。夹紧端挠度(单位: mm)和转角(单位: °)均为0, 自由端的弯矩(单位: Nm)和剪力(单位: N)也为0, 将这些边界条件代入到式(3)中, 可以得到

$$\begin{cases} Q_4 = -Q_2 \\ Q_3 = -Q_1 \\ -Q_1 \cos(\beta L) - Q_2 \sin(\beta L) + \\ Q_3 \cosh(\beta L) + Q_4 \sinh(\beta L) = 0 \\ Q_1 \sin(\beta L) - Q_2 \cos(\beta L) + \\ Q_3 \sinh(\beta L) + Q_4 \cosh(\beta L) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

式中: L 为梁在 x 方向上的总长度。该方程组有非零解的充要条件是

$$\cosh(\beta_n L) \cos(\beta_n L) + 1 = 0 \quad (5)$$

式中: $\beta_n L$ 对应于该方程的第 n 个特征根。通过数值方法或图解法可以求解此非线性方程, 特征根如表1所示。

对应的自然振动频率为

$$\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}} = (\beta_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}} \quad (6)$$

对于矩形截面样品,其横截面的面积二阶矩由式(7)计算。

$$I = \frac{1}{12}bh^3 \quad (7)$$

式中: b 和 h 分别为横截面的宽度和长度,此外,第 n 阶圆频率 ω_n 与频率 f_n 之间存在关系

$$\omega_n = 2\pi f_n \quad (8)$$

杨氏模量与各阶谐振频率关系如式(9)所示。

$$E = \frac{\omega_n^2 \mu L^4}{(\beta_n L)^4 I} = 48\pi^2 \cdot f_n^2 \cdot \frac{mL^3}{(\beta_n L)^4 bh^3} \quad (9)$$

当考虑前两阶谐振频率时,式(9)可转变为

$$E = 24\pi^2 \cdot \frac{mL^3}{bh^3} \cdot \left(\frac{f_1^2}{(\beta_1 L)^4} + \frac{f_2^2}{(\beta_2 L)^4} \right) \quad (10)$$

式中: m 为样品质量, f_1 和 f_2 分别为第一阶和第二阶共振频率。

前两阶谐振频率的综合考量,减小了单个谐振频率的波动引起的结果偏差。

表1 悬臂梁频率方程特征根

Tab.1 Eigen roots of the cantilever beam frequency equation

$\beta_1 L$	$\beta_2 L$	$\beta_3 L$	$\beta_4 L$
1.875 1	4.694 1	7.854 8	10.995 5

2 实验验证

2.1 待测材料与实验装置

本实验选用4种金属材料,分别是不锈钢(304)、碳素结构钢(Q235)、黄铜(H62)和钽铁硼(N45),其尺寸和质量如表2所示。

本实验所用仪器为杭州亿恒科技有限公司制造的高频激振器(正弦信号输出:最大推力100 N,频率范围40~20 000 Hz,最大位移4 mm,最大加速度25 g)、功率放大器(输出功率120 VA,频率范围为直流~20 kHz,最大电压22 V,最大电流5.5 A,失真<0.1%,信噪比>90 dB)和振动控制器(动态范围0.000 02~10 V,分析频宽正弦1~20 000 Hz,频率误差≤0.01%,谐波失真幅度<-95 dB),以及质感光子科技有限公司提供的激光测振仪(工作电

压12 V,功率4 W,频率范围直流~2.5 MHz,位移分辨率0.01 nm,位移重复误差最小0.1 nm,>1 kHz,模拟输出灵敏度范围0.000 5~4 444 mV/mm)等。实验设备及环境搭建如图3所示。

2.2 实验步骤

样品通过夹具固定,仅考虑其纵向振动模式。由激光测振仪获取样品末端的振动信息。实验采用闭环控制技术实现精准激励,振动频率范围设定为20~20 000 Hz,激励加速度为1 g,加速度传感器灵敏度为103.34 mV/g。信号采集的分析频率为20 kHz,时间分辨力为10 ms。根据奈奎斯特定理,采样率必须至少是信号最高频率的2倍,以避免混叠现象。在本实验中,采样率在设备允许范围内,被设定为样品第二阶共振频率的约2.6倍。激光测振仪的灵敏度会随加速度量程的变化而变化,因此,通过在不同条件下进行预实验,获取振动响应数据以选择合适的灵敏度。

在相同实验条件下,对每个待测样品进行多次测量,以验证测量结果的稳定性和一致性。基于实验获得的前两阶谐振频率,经由欧拉-伯努利梁理论计算,即可获得每一个样本材料的杨氏模量,具体数据分析将在第3节详细讨论。

3 实验结果与讨论

3.1 实验结果

实验获得的激励信号、响应信号以及传递函数如图4所示。图4(d)中的曲线有2个峰值,分别代表样品的第一阶和第二阶谐振频率。

样本材料的尺寸存在较大差别,会影响波长的容纳能力以及激励效果,进而使谐振频率的位置发生变化。因此,做出假设:无论样品材料的尺寸如何变化,悬臂梁结构的第一阶共振频率都应当在10 kHz以下,大多数金属材料能够满足该条件。如图5所示,根据测得的第一阶和第二阶谐振频率分别计算杨氏模量 E_1 和 E_2 。将本研究得到的杨氏模量结果及其变异系数设定为 E_d 和 C_{vd} ;仅根据第一阶共振频率计算得到的杨氏模量平均值及其变异系数设定为 E_s 和 C_{vs} 。表达式如下

$$E_s = E_1 = 48\pi^2 \cdot f_1^2 \cdot \frac{mL^3}{(\beta_1 L)^4 bh^3} \quad (11)$$

表2 待测材料的尺寸和质量
Tab.2 The dimensions and mass of the material to be tested

材料种类	材料编号	长度 L / mm	宽度 b / mm	高度 h / mm	质量 m / g
304	1	30	10	2	7.62
	2				7.69
	3	40			6.22
	4				6.20
	5	50			4.63
	6				4.67
Q235	1	30	10	2	7.76
	2				7.75
	3	40			6.25
	4				6.24
	5	50			4.68
	6				4.66
H62	1	30	10	2	8.32
	2				8.31
	3	40			6.67
	4				6.65
	5	50			4.97
	6				4.97
N45	1	50	5	2	7.60
	2				7.58
	3		10		3.79
	4				4.80
	5		10	2.5	9.47
	6				9.49

$$E_d = \frac{E_1 + E_2}{2} = 24\pi^2 \cdot \frac{mL^3}{bh^3} \cdot \left(\frac{f_1^2}{(\beta_1 L)^4} + \frac{f_2^2}{(\beta_2 L)^4} \right)$$

(12)

计算每组数据的变异系数 C_{V_s} 和 C_{V_d} 。

$$C_V = \frac{\sigma}{\mu} \times 100\%$$

(13)

式中： σ 和 μ 为对应数据组的标准差和均值。

将利用本文方法和利用一阶谐振频率计算的杨氏模量均值与变异系数记录于表3中。将本研究计算出的结果与美国 Mat Web 数据库中的数据在表

4中进行对比。

3.2 分析与讨论

本研究采用多阶谐振法测量了4种金属的杨氏模量。由于样品的第一阶模态可能与夹具等结构的低频模态耦合，仅基于样品的第一阶模态进行计算会导致结果偏低。而通过采用前两阶共振频率进行计算，可以有效提高结果的准确性。此外，对比分析表明：本方法的变异系数显著降低。结合图5中的箱体长度和变异范围，进一步证明了该方法具有高度的一致性和可靠性。

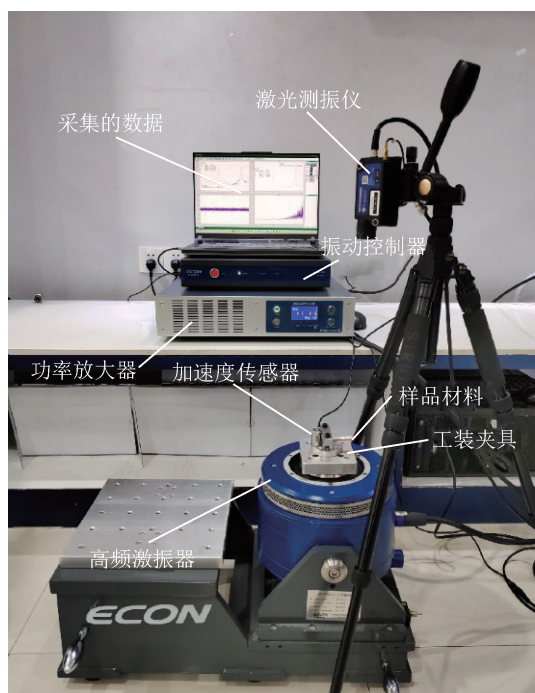


图3 实验设备及环境

Fig.3 The experimental apparatus and environment

总体而言,数据分布均衡,表现出良好的对称性,平均值和中位数的数值非常接近,无明显偏态。数据中仅存在少量异常值,并且这些异常值的偏移幅度较大,进而影响了箱体的长度,例如,304钢的 E_2 和Q235钢的 E_2 。

经分析,304钢 E_2 的异常数据来源于304钢的2号样品,对该样品的多个采样点进行重复测量并取平均值后,得到的结果为208.047 GPa,远高于平均水平。因此,可以判断是该样品本身导致了箱体长度的异常。

相似地,Q235钢 E_2 的异常数据来源于Q235钢的4号样品。对该样品的多个采样点进行重复测量后发现,除左端点数据有较大偏差外,其余位置的平均值为202.758 GPa。推测可能是由于材料的不均匀性或局部缺陷,影响了局部刚度,进而使固有频率产生偏移,使得测量值高于平均水平。

针对这些异常数据,分别进行剔除和修正处理,重新分析均值与变异系数,得到结果如表5所示。

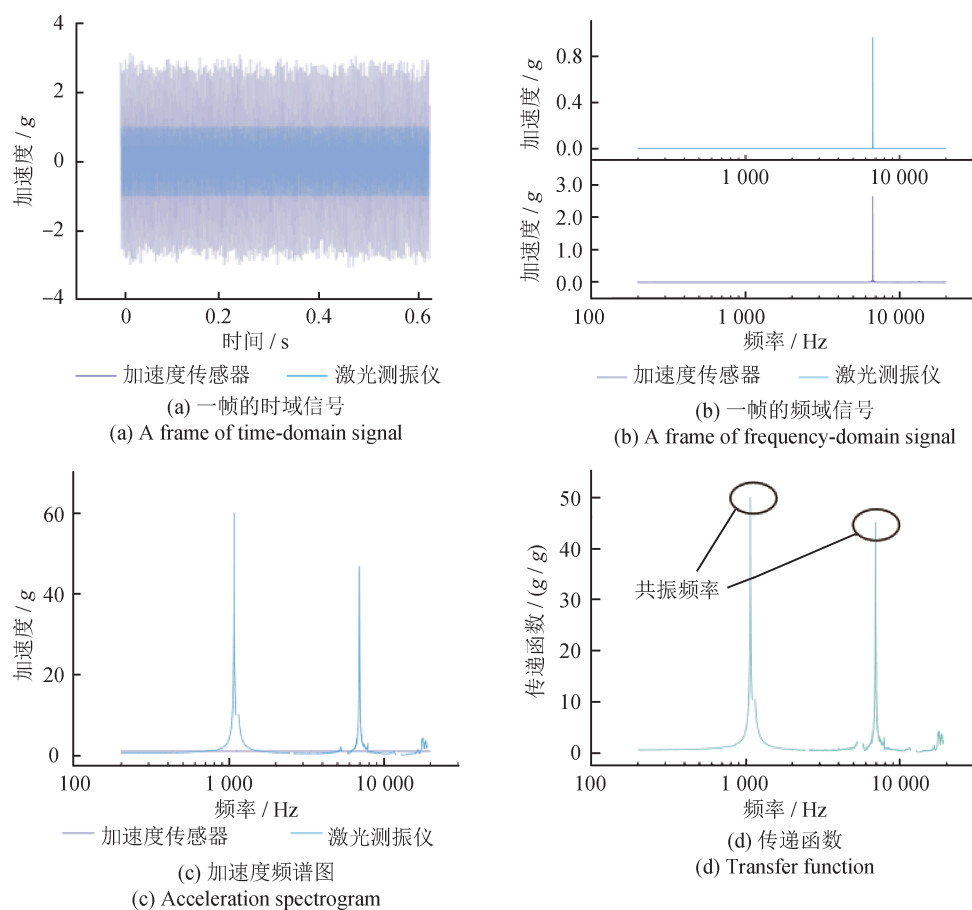


图4 Q235正弦扫频实验测试结果

Fig.4 Q235 Sine frequency sweep experiment test results

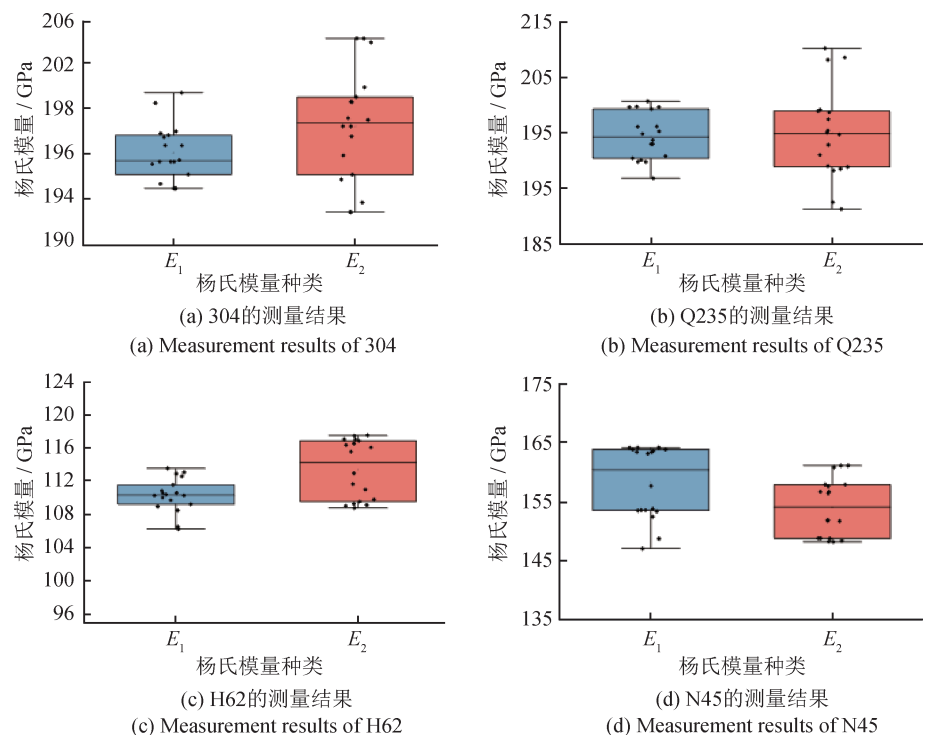


图5 基于第一阶和第二阶谐振频率计算的4种金属材料的杨氏模量测量结果

Fig.5 Young's modulus measurement results of four metal materials based on the first and second order resonant frequencies

表3 利用本文方法和利用一阶谐振频率计算的杨氏模量均值与变异系数

Tab.3 The average Young's modulus and coefficient of variation calculated using the method in this paper and the first-order resonance frequency

Material	E_d /GPa	C_{vd} /%	E_s /GPa	C_{vs} /%
304	195.90	2.12	185.85	8.34
Q235	201.60	2.59	190.73	8.91
H62	110.51	2.25	107.75	9.05
N45	154.48	3.93	153.82	4.32

表4 本方法计算所得杨氏模量与 Mat Web 数据库中的数据对比

Tab.4 Comparison of Young's modulus calculated by this method with data from Mat Web Database

Material	E_d /GPa	E in Mat Web /GPa
304	195.90 ± 0.69	193 ~ 200
Q235	201.60 ± 0.59	200
H62	110.51 ± 0.41	75.8 ~ 121
N45	154.48 ± 0.97	150 ~ 160

表5 剔除异常数据后 304 钢和 Q235 钢的平均值与变异系数

Tab.5 Mean and coefficient of variation of 304 steel and Q235 steel after removing abnormal data

Material	E_d /GPa	C_{vd} /%
304	195.37	2.01
Q235	201.61	1.83

去除异常值的影响后，变异系数显著降低。将实验数据与美国 Mat Web 数据库进行比较发现：采用多阶谐振法测量的杨氏模量平均值与 Mat Web 数据库的标准值十分接近，并且变异系数均控制在 4% 以内，这充分展现了该方法的高度精确性和一致性。

4 结论

本文提出了一种基于金属材料多阶谐振的杨氏模量动态测量方法，通过前两阶谐振频率进行计算分析。针对 4 种不同金属样品施加 200 ~ 20 000 Hz 的正弦扫频激励，采集响应信号并将其转换为样品的传递函数，进而获取前两阶谐振频

率,据此精确计算杨氏模量,结论如下:

1) 更具准确性和鲁棒性

多阶谐振法根据前两阶谐振频率计算金属材料的杨氏模量,能够有效避免基于单个共振频率带来的不确定性影响,从而获得更为准确的杨氏模量。

2) 具有良好的一致性和可靠性

通过多阶谐振法测量的数据无明显偏态。相较静态测试,采用本方法测量的样品内部应变较低,能够表现出材料真实的物理特性。此外,本方法不易受到安装过程及环境因素的影响。

3) 具有较高的精度

经由多阶谐振法计算的杨氏模量平均值与美国 Mat Web 数据库中的标准值高度一致。此外,实验数据的变异系数小,这确保了实验的可重复性,进一步证实了本方法在杨氏模量测量领域的适用性与精确性。

多阶谐振法具有高精度、高一致性的特点,适用于金属材料的杨氏模量测定。然而,本研究的实验范围仅限于各向同性的金属材料。因此,未来的研究工作应进一步拓展至其他各向同性材料,甚至包括某些非金属材料,以进一步验证本方法的普适性和适用范围。

对于各向异性材料,由于其内部力学性能具有方向性,现有理论需要进一步完善和补充。未来的研究将着重改进现有的多阶谐振法模型,通过对内部结构的细化以及不同方向的应力应变关系进行分析,提出更精准的模型和测量方法,以便该技术应用于复杂材料领域。

参考文献

- [1] WĘGLEWSKI W, BOCHENEK K, BASISTA M, et al. Comparative assessment of Young's modulus measurements of metal-ceramic composites using mechanical and non-destructive tests and micro-CT based computational modeling [J]. Computational Materials Science, 2013, 77: 19-30.
- [2] JAOUEN L, RENAULT A, DEVERGE M. Elastic and damping characterizations of acoustical porous materials: Available experimental methods and applications to a melamine foam [J]. Applied Acoustics, 2008, 69(12): 1129-1140.
- [3] BEZERRA A K L, MELO A R S, FREITAS I L B, et al. Determination of modulus of elasticity and Poisson's ratio of cementitious materials using S-wave measurements to get consistent results between static, ultrasonic and resonant testing [J]. Construction and Building Materials, 2023, 398: 132456.
- [4] BAI X, MA J, XU W, et al. Off-epicentral measurement of laser-ultrasonic shear-wave velocity and its application to elastic-moduli evaluation [J]. Ultrasonics, 2023, 127: 106850.
- [5] SONG I, SUH M, WOO Y K, et al. Determination of the elastic modulus set of foliated rocks from ultrasonic velocity measurements [J]. Engineering Geology, 2004, 72(3): 293-308.
- [6] Standard test method for dynamic Young's modulus, shear modulus, and poisson's ratio by impulse excitation of vibration: ASTM E1876-22 [S]. West Conshohocken: ASTM International, 2022.
- [7] BAHR O, SCHAUMANN P, BOLLEN B, et al. Young's modulus and poisson's ratio of concrete at high temperatures: Experimental investigations [J]. Materials & Design, 2013, 45: 421-429.
- [8] LARA C A, GÁLVEZ J-F D L M, CASCANTE G, et al. Static elastic modulus prediction at early ages using a modified resonant test for concrete cylinders using mems microphones [J]. Case Studies in Construction Materials, 2024, 20: e02864.
- [9] KEMPS B, DE KETELAERE B, BAMELIS F, et al. Development of a methodology for the calculation of Young's modulus of eggshell using vibration measurements [J]. Biosystems Engineering, 2004, 89(2): 215-221.
- [10] BAHR O, SCHAUMANN P, BOLLEN B, et al. Young's modulus and poisson's ratio of concrete at high temperatures: experimental investigations [J]. Materials & Design, 2013, 45: 421-429.
- [11] SCHMIDT R, ALPERN P, TILGNER R. Measurement of the Young's modulus of moulding compounds at elevated temperatures with a resonance method [J]. Polymer Testing, 2005, 24(2): 137-143.
- [12] SCHMIDT R, WICHER V, TILGNER R. Young's modulus of moulding compounds measured with a resonance method [J]. Polymer Testing, 2005, 24(2): 197-203.
- [13] CHEN Z, GANDHI U, LEE J, et al. Variation and consistency of Young's modulus in steel [J]. Journal of Mate-

- rials Processing Technology, 2016, 227: 227–243.
- [14] THOMAZ W de A, MIYAJI D Y, POSSAN E. Comparative study of dynamic and static Young's modulus of concrete containing basaltic aggregates [J]. Case Studies in Construction Materials, 2021, 15: e00645.
- [15] KONSTANTINIUK F, KROBATH M, ECKER W, et al. Influence of the aspect ratio of the micro-cantilever on the determined Young's modulus using the Euler-Bernoulli equation [J]. Materials Today Communications, 2023, 35: 106225.
- [16] CHIMENO MANGUÁN M, ROIBÁS MILLÁN E, SIMÓN HIDALGO F. On the determination of the modulus of elasticity of plasterboard plates [J]. Construction and Building Materials, 2018, 187: 923–930.
- [17] CARACCIOLO R, GASPARETTO A, GIOVAGNONI M. Measurement of the isotropic dynamic Young's modulus in a seismically excited cantilever beam using a laser sensor [J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 231 (5): 1339–1353.
- [18] BLONDEL M, ABIDINE Y, ASSEMAT P, et al. Identification of effective elastic modulus using modal analysis; application to canine cancellous bone [J]. Journal of Biomechanics, 2020, 110: 109972.
- [19] 全国文献工作标准化技术委员会. 金属材料弹性模量和泊松比试验方法: GB/T 22315–2008 [S]. 北京: 中国标准出版社, 2008: 59–92.
- National Committee for Standardization of Documentation. Test method for elastic modulus and Poisson's ratio: GB/T 22315–2008 [S]. Beijing: China Standards Press, 2008: 59–92. (in Chinese)
- [20] Glass in building-glazing and airborne sound insulation-measurement of the mechanical impedance of laminated glass: ISO 16940: 2008 [S]. Switzerland: International Organization for Standardization, 2008.
- [21] YOSHIHARA H, MARUTA M. Determining the Young's modulus of solid wood by considering the fundamental frequency under the free-free flexural vibration mode [J]. Wood Science and Technology, 2021, 55(4): 919–936.
- [22] SOFI A, MUSCOLINO G. Static analysis of Euler-Bernoulli beams with interval Young's modulus [J]. Computers & Structures, 2015, 156: 72–82.
- [23] AYDOGDU M. Semi-inverse method for vibration and buckling of axially functionally graded beams [J]. Journal of Reinforced Plastics and Composites, 2008, 27 (7): 683–691.
- [24] KHASAWNEH F A, SEGALMAN D. Exact and numerically stable expressions for Euler-Bernoulli and timoshenko beam modes [J]. Applied Acoustics, 2019: 151: 215–228.
- [25] LI S R, BATRA R C. Relations between buckling loads of functionally graded timoshenko and homogeneous Euler-Bernoulli beams [J]. Composite Structures, 2013, 95: 5–9.

(本文编辑: 李成成)



第一作者: 刘复乐(2000—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为振动计量、测试和控制。



通信作者: 陈章位(1965—), 男, 浙江大学教授, 博士生导师, 长期致力于振动控制、机械动力学测试、机器人性能检测与校准、分析与控制领域的教学与科研工作。研究工作兼具理论深度和工程应用, 非常注重科技成果转化, 在振动控制仪、振动台、机械动力学测试与分析、标准振动台等的研制与产业化已取得了突出成就。